

BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EM. III NAPOLI
B. Prov.
XIV
297

BIBLIOTECA PROVINCIALE



Armadio XVII
Palchetto 6
Num.° d' ordine 77

B. Rou.
XIV
297

Digitized by Google

Digitized by Google

NOUVEAUX PRINCIPES D'ARTILLERIE.

Google

Digitized by Google

64577.97
SBN

NOUVEAUX PRINCIPES D'ARTILLERIE

DE

M. BENJAMIN ROBINS,

COMMENTÉS

PAR M. LÉONARD EULER,

TRADUITS DE L'ALLEMAND,

AVEC DES NOTES,

Par M. LOMBARD, Professeur royal aux Écoles d'Artillerie à Auxonne.





A DIJON,
Chez L. N. FRANTIN, Imprimeur du Roi.
Et se trouve A PARIS,
Chez JOMBERT fils aîné, Libraire du Roi, rue Dauphine.

M. DCC. LXXXIII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

Digitized by Google

PRÉFACE.

L'Ouvrage dont je donne la traduction ne peut paroître ſous de plus heureux auſpices, que la célébrité des deux Savans qui en ſont les Auteurs : il doit intéreſſer tous les Géometres par l'application qu'on y fait du calcul aux ſciences phyſico-mathématiques ; il intéreſſe plus particuliérement les Officiers du Corps royal de l'Artillerie par les connoiſſances qu'il renferme ſur le principal objet de leur Art : la force de la poudre, & le tir des bouches à feu. Car on peut dire, ſans trop avancer, que c'eſt ſur ces deux points que roulent toutes les pratiques de l'Artillerie. La fabrication des armes à feu, la conſtruction de leurs divers attirails, n'ont d'autre fondement que cette force prodigieuſe d'un agent, dont les uns doivent diriger les effets, en même temps que les autres doivent en aſſurer l'exécution par une réſiſtance invincible.

On penſe aſſez communément que le tir des bouches à feu n'exige pas des lumieres bien tranſcendantes, qu'il eſt même

facile, avec un peu d'expérience, de parvenir à toute la justesse que l'on peut desirer. Quelque faux que soit un tel préjugé, tout préjudiciable qu'il puisse être au bien du service, je conviens que le succès de plusieurs opérations d'Artillerie, quoiqu'elles n'eussent point été éclairées du flambeau de la théorie, a pu y donner lieu & le justifier à certains égards. Mais si l'on jette un œil attentif sur cet Ouvrage; si l'on y trouve des regles de pratique qui sont le fruit d'une profonde connoissance des sciences physico-méchaniques, & de la force de la poudre; si le calcul infinitésimal est l'instrument qu'il a fallu employer pour découvrir des vérités utiles; on sera obligé de convenir aussi qu'avec ces secours le service de l'Artillerie ne peut avoir que des succès plus constans, plus uniformes & moins incertains.

L'Artillerie a eu son enfance comme toutes les autres sciences, mais beaucoup plus longue : livrée d'abord à une routine aveugle, ses progrès ont été très-lents. Il a fallu deux siecles pour détruire l'absurde opinion du mouvement rectiligne des projectiles; un autre siecle pour dissuader les Artilleurs de leur mouvement parabolique. Les effets de la résistance de l'air, quoique

connus depuis long-temps, étoient un secret relégué dans les écrits de quelques Savans, & totalement ignorés des Artilleurs, à qui cependant cette connoissance étoit le plus nécessaire. Les Tables du Bombardier françois, qui ont paru en 1731, sont encore une preuve de l'ignorance où l'on étoit alors à ce sujet, même parmi les Instituteurs de l'Artillerie; & long-temps après, bien loin d'attribuer à la résistance de l'air de prétendues irrégularités que l'on croyoit appercevoir dans le tir des bouches à feu, on recouroit, pour les expliquer, à des causes qui n'y avoient pas la moindre part (1).

Rien n'étoit plus propre à donner une idée juste de l'influence de l'air, comme milieu résistant, sur le mouvement des projectiles, que les nouveaux principes d'Artillerie de M. Robins. La méthode aussi

(1) Il n'y a pas vingt ans que la portée d'un mortier pointé à 75 degrés, n'ayant été que les deux tiers environ de sa portée sous 15 degrés, la prévention pour le mouvement parabolique, fit regarder cette différence comme un accident produit par un choc de la bombe contre le mortier; quoiqu'avec certaines charges ce soit un effet tout naturel de la résistance de l'air.

ſimple qu'ingénieuſe qu'il a imaginée pour confirmer ſa théorie par l'expérience, lui à mérité les plus grands éloges. Sa doctrine de la réſiſtance de l'air a diſſipé les ténebres qui couvroient encore cette matiere, ſoit en donnant ſur la maniere dont les divers milieux réſiſtent, des notions plus exactes qu'on ne l'avoit fait juſqu'alors, ſoit en indiquant les moyens d'apprécier la grandeur de cette réſiſtance, que l'on étoit bien éloigné de croire auſſi conſidérable pour les mouvemens rapides, qu'elle l'eſt en effet.

L'Ouvrage de M. Robins parut à Londres en 1742; le rapport qui en a été fait à la Société Royale, eſt inſéré dans les Tranſactions philoſophiques de 1743. L'importance des recherches qu'il renferme, l'a fait traduire en pluſieurs Langues, & le célebre Euler lui-même l'ayant jugé digne de ſon attention, s'eſt mis au nombre des Traducteurs; mais non content de faire connoître cet Ouvrage à l'Artillerie Pruſſienne par une ſimple verſion, il l'a enrichi d'un Commentaire très-ſavant & très-étendu, dans lequel il développe la théorie de l'Auteur anglois, la ſoumet au calcul, la rectifie à pluſieurs égards, & répand ſur tous les points cette clarté lu-

mineufe qui caractérife toutes fes productions. Il eft inutile d'entrer dans de plus grands détails fur le mérite de ce Commentaire, le nom de fon Auteur fuffit pour en faire l'éloge, & la peine qu'il a prife de le compofer, celui de l'Ouvrage anglois.

Il paroîtra peut-être extraordinaire qu'un Ouvrage auffi utile, publié à Berlin en 1745, foit refté fi long-temps inconnu en France; & l'on me reprochera fans doute que, parvenu à ma connoiffance dès 1748, traduit au bout de trois ans, j'en ai tant retardé la publication. Je dirai donc pour ma juftification, pour peu que cela puiffe intéreffer le Lecteur, que ce travail entrepris feulement pour mon inftruction particuliere, n'étoit point deftiné à voir le jour; qu'en fuppofant même l'intention de le faire paroître, le bien du fervice qui pouvoit feul m'y déterminer, devoit auffi m'engager à m'affurer avant tout par l'expérience, de la vérité des principes rapportés dans cet Ouvrage, & de la poffibilité d'en faire l'application aux gros calibres, ce que plufieurs circonftances ne m'ont permis d'exécuter qu'à des époques très-éloignées; qu'enfin follicité & décidé à livrer mon travail à l'impreffion, j'appris il y a quelques années qu'il exiftoit une

autre traduction du même Ouvrage ; je découvris qu'elle étoit d'un Amateur aussi distingué par sa naissance, que par son goût pour les Mathématiques, & la part qu'il a eue à l'éducation d'un grand Prince. Je n'hésitai point à lui en céder tout l'honneur, persuadé que le Public ne pouvoit qu'y gagner : mais peu jaloux de la petite gloire attachée à la simple traduction d'un Ouvrage purement scientifique, il eut la complaisance de me sacrifier son manuscrit, dont j'ai tiré le plus grand parti, & de permettre que l'Ouvrage parût sous mon nom. Sensible à un pareil procédé, je le prie d'agréer le témoignage public que je lui fais de toute ma reconnoissance.

L'ingénieuse simplicité de la machine imaginée par M. Robins, l'exactitude des procédés qu'elle exige, fondés sur une théorie incontestable, ont engagé plusieurs personnes à répéter ses expériences : mais cette invention, malgré le degré de perfection qu'elle avoit en sortant des mains de son Auteur, laissoit encore à desirer qu'on pût l'appliquer à des boulets d'un plus gros calibre ; il ne s'agissoit, pour y parvenir, que d'augmenter le poids & la longueur du pendule, en lui donnant assez de solidité pour qu'il puisse résister au choc

violent d'un corps pesant animé d'une grande vîtesse. M. Hutton est le premier qui ait entrepris ce changement, qu'il a heureusement exécuté à Woolwich en 1775. Un pendule long de huit pieds & demi, pesant environ cinq cents livres, au lieu des balles d'une once, auxquelles M. Robins s'étoit borné, l'a mis en état de soumettre à l'expérience des balles de 20 à 50 fois plus pesantes, avec des charges de deux, quatre & huit onces de poudre. Ces expériences, qui font le sujet d'un Mémoire inséré dans les Transactions philosophiques, méritent l'attention de nos Lecteurs; elles conduisent à des conséquences utiles à l'Artillerie, & plus immédiatement applicables aux gros calibres que celles de M. Robins. On en verra les résultats à la suite de cet Ouvrage, où ils trouvent naturellement leur place.

Il y a toute apparence que M. Hutton n'a eu aucun doute sur la validité de la théorie que notre Auteur a déduite de ses expériences concernant la résistance de l'air; s'il avoit pensé que les balles de plomb sont sujettes à se déformer dans l'ame d'un canon de fusil, & que sous une figure différente de la sphérique, elles peuvent rencontrer une plus grande résistance dans le

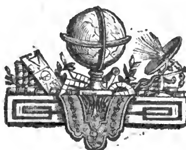
fluide qu'elles traverſent, il n'auroit pas manqué d'employer ſes balles de fer, pour conſtater ou rectifier cette théorie, & diſſiper les incertitudes qui nous reſtent encore à ce ſujet.

Pour exprimer la force élaſtique de l'air ſelon les différens degrés de denſité de ce fluide, M. Euler fait uſage, dans ſes remarques, d'une formule qui ſeroit inintelligible, ſi l'on n'en connoiſſoit point le principe. Cette formule étant le réſultat d'une théorie ſur les propriétés de l'air, qui fait le ſujet d'un Mémoire inſéré dans le Recueil de l'Académie de Pétersbourg, nous avons cru devoir en donner un extrait aſſez détaillé, pour ne rien laiſſer à deſirer à cet égard.

Les notes que j'ai eu occaſion de répandre dans cet Ouvrage ſont au nombre de quarante-ſix : il y en auſſi de l'Auteur anglois, mais ſeulement dans l'introduction. Celles-ci ſont indiquées par des lettres, & les miennes par des nombres. Il en eſt parmi ces dernieres qui ne ſont faites que pour le petit nombre des Lecteurs qui, pouvant être arrêtés par des difficultés de calcul, ſeroient obligés de recourir aux Élémens : je cite à cet effet le Cours de M. Bezout à l'uſage de l'Artillerie, où les

principes ſont préſentés d'une maniere ſatisfaiſante, ce Cours devant être entre les mains de ceux auxquels ma Traduction eſt particuliérement deſtinée.

La Table ſuivante eſt une liſte des propoſitions de M. Robins, contenues dans cet Ouvrage, & elle indique le Commentaire de M. Euler ſous le titre de remarques à la ſuite de chaque propoſition.



TABLE

des Propositions & des Remarques.

CHAPITRE II.

Fin de la Table des Propositions & des Remarques.

EXTRAIT DES REGISTRES

DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

Du 6 Septembre 1775.

MESSIEURS du Séjour & de la Place; qui avoient été nommés pour examiner deux Ouvrages de M. Euler, dont l'un a pour titre, *Théorie navale*, & l'autre, *Traité d'Artillerie par Robins, avec des Notes de M. Euler*, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé que ces Ouvrages, déjà connus & favorablement accueillis du Public, méritoient d'être réimprimés avec l'approbation & sous le privilege de l'Académie. En foi quoi j'ai signé le présent certificat. A Paris le 15 Août 1776.

GRANJEAN DE FOUCHY, Secrétaire-Perpétuel de l'Académie royale des Sciences.



DISCOURS PRÉLIMINAIRE

DE L'AUTEUR,

Sur l'origine & les progrès de la Fortification & de l'Artillerie.

L'OBJET de cet Ouvrage eſt de déterminer la force & l'action de la poudre enflammée, de maniere à pouvoir en déduire la vîteſſe des corps mis en mouvement par ſon exploſion. On y examine auſſi la réſiſtance prodigieuſe que l'air oppoſe aux corps qui ſe meuvent avec une grande vîteſſe, & l'on y fait voir la fauſſeté des préjugés dans leſquels on a été juſqu'à préſent, tant ſur la vîteſſe des projectiles de l'Artillerie, que ſur la nature de la courbe que ces corps décrivent.

Pour répandre plus de lumiere ſur ce que nous avons à dire de ces différens objets, & mettre le Lecteur en état de comparer notre théorie avec les anciennes opinions, nous allons entrer dans quelques détails ſur l'origine de la poudre, ſur les progrès de l'Artillerie & ſur l'art de fortifier ; & quoique nous n'ayons principalement en vue que la perfection de la théorie & de la pratique de l'Artillerie ; cet art eſt tellement lié avec les ſyſtêmes modernes de fortification, que

nous avons cru devoir faire précéder la description des machines qu'on y emploie, par l'exposition des divers changemens qu'elles ont occasionnés dans l'Architecture militaire.

Les Auteurs ne s'accordent point entr'eux sur l'invention des bastions, le temps & le lieu de leur premiere construction sont également ignorés: les uns en font honneur à Zisca en Bohême; selon d'autres, ce fut Achmet Bacha, qui, après la prise d'Otrante, en 1480, fit construire de nouveaux ouvrages à cette place, & y éleva les premiers bastions qui eussent paru jusqu'alors (*a*); mais cette conjecture ne se trouve que dans quelques Auteurs modernes. Ceux qui ont écrit vers le commencement du dernier siecle & avant ce temps, pensent que ce n'est que peu à peu que les bastions ont été introduits dans l'ancienne fortification, & que la gloire n'en est due à aucun inventeur en particulier. C'étoit le sentiment de Pasino, qui, en parlant des changemens survenus dans la fortification, observe, dans la premiere partie de son Ouvrage, qu'ils ont eu lieu à mesure que l'Artillerie est devenue plus formidable, sans prétendre qu'aucune de ces innovations eût une époque fixe, ou un inventeur particulier (*b*). Ce qu'il

---

(*a*) Voyez le Commentaire de Folard sur Polybe, tom. 3. pag. 2.

(*b*) Discours sur plusieurs points de l'Architecture de guerre, concernant les fortifications, tant anciennes que modernes, par M. Aurelio de Pasino Ferrarois, Architecte de très-illustre Seigneur, Monseigneur le Duc de Bouillon, imprimé chez Plantin 1579. On voit par un Compliment en vers, qui est à la tête de cet ouvrage, que cet Auteur avoit fortifié Sedan.

y a donc de plus certain concernant l'ancienneté des bastions, c'est qu'ils étoient connus vers le commencement du seizieme siecle: c'est en 1546 que Tartalea dit, dans ses *Quæsiti & Inventi diversi*, qu'étant à Veronne (sans doute quelques années auparavant), il y avoit vu travailler à des bastions d'une grandeur extraordinaire, que plusieurs étoient entièrement construits, & d'autres seulement commencés. Un plan de Turin, qui se trouve dans le même livre, fait voir que cette place étoit fortifiée de quatre bastions, & ce plan n'étoit point nouveau lorsque Tartalea publia son Ouvrage. Il y est dit aussi que le Prieur de Barlette, qui étoit un homme de guerre, regardoit la forteresse de Turin comme imprenable, pensant à cet égard comme tous les Militaires de son temps. Il avoit même une si haute idée des fortifications de cette place, qu'il ne doutoit point que l'art ne fût porté au plus haut degré de perfection. Cette admiration des gens du métier pour l'état où se trouvoit alors l'Architecture militaire, fait bien voir que les bastions, qui en faisoient le principal mérite, étoient une découverte toute récente.

Les premiers bastions, tels que ceux de Turin, d'Anvers (*c*) & autres de la même ancienneté, étoient très-petits & fort éloignés les uns des autres; car les attaques étoient alors dirigées sur la courtine plutôt que sur les bastions: mais peu de temps après on leur donna plus d'étendue & on les rapprocha davantage, comme il paroît par la citadelle d'Anvers, construite

(*c*) Anvers fut fortifié vers l'an 1540, comme Speckle nous l'appread au 1er. liv. chap. 10.

en 1566, sous les ordres du Duc d'Albe : les éloges prodigués à cette construction par les Auteurs contemporains, prouvent que c'étoit le premier exemple de cette invention.

Il est donc constant que vers le commencement du seizieme siecle, les fortifications prirent une nouvelle forme; que les changemens qu'on y a faits de nos jours peuvent tous être rapportés aux méthodes que l'on suivoit alors, ou qu'on a imaginées peu de temps après; enfin, que les regles de cet art furent dès-lors fixées par des hommes célebres, tels que La Treille (*d*), Alghisi, Marchi, Pasino, & sur-tout par Speckle (*e*), un des plus grands génies en ce genre.

Pour mieux juger des avantages de la fortification moderne, il est à propos de rapporter les différentes méthodes qu'on a employées pour couvrir les flancs, qui forment la principale défense d'une place : c'est par la maniere de mettre les flancs en sûreté, qu'on doit apprécier la bonté de chaque systême de fortification.

Les moyens les plus usités pour remplir cet objet, sont les orillons, les ravelins qu'on place devant la courtine, les demi-lunes mises en avant de l'angle flanqué des bastions, & les

(*d*) La maniere de fortifier villes, châteaux, & faire autres lieux forts, mise en françois par le Seigneur Bereil François de la Treille, Commissaire en Artillerie, Lyon 1556. Cet Auteur est le premier, à ce que je crois, qui ait proposé les courtines retirées, données ensuite par d'autres sous le nom d'ordre renforcé.

(*e*) Daniel Speckle étoit Architecte de la ville de Strasbourg : il mourut en 1589. On a de lui un Traité de fortification en allemand, réimprimé à Leipsick en 1736.

contre-gardes. Nous allons examiner l'origine & l'usage de chacune de ces pieces.

Les orillons sont aussi anciens que les bastions : on voit sur les plans de Turin & d'Anvers, des flancs bas taillés dans le bastion, avec des épaulemens d'une épaisseur considérable pour les mettre à couvert des batteries de la campagne. Les dessins de Pasino, Speckle & autres, indiquent un grand nombre d'orillons pareils à ceux d'à présent, avec cette différence seulement, que les modernes sont beaucoup moins massifs que les anciens. Si l'on a mis des orillons dans tous les systêmes de fortifications les plus estimés, c'est moins pour les services qu'on en retire aujourd'hui, qu'à cause des avantages que les anciens leur ont attribués : autrefois l'assiégeant étant parvenu au haut de la breche, y rencontroit ordinairement de nouveaux obstacles à franchir ; il falloit commencer un nouveau siege en attaquant le retranchement qu'on ne manquoit pas de lui opposer ; l'assiégé faisoit alors agir le canon placé derriere l'orillon dans les flancs des bastions voisins, inquiétoit par-là l'assiégeant & le forçoit souvent, après avoir établi son logement sur les ruines de la breche, de se retirer & d'abandonner l'entreprise. Mais comme il arrive rarement de nos jours que l'assiégé fasse une plus longue résistance, quand la breche est formée & le fossé comblé, les orillons ont perdu leur principal avantage (1).

(1) On auroit dû dire avec plus de raison, que les orillons sont devenus inutiles, depuis qu'on fait employer les bombes pour ruiner les défenses des flancs.

Les ravelins qu'on plaçoit devant les courtines (on les nomme demi-lunes dans les systêmes modernes), devoient servir à garantir les flancs des feux croisés, & à gêner l'emplacement des batteries, qu'on établit sur la partie opposée de la contrescarpe pour battre les flancs qui en seroient trop incommodés. L'invention en est aussi ancienne que l'art même de fortifier : car il s'en trouve dans les plus anciennes fortifications; les premiers Auteurs qui ont écrit sur cette matiere en font mention, & les nouveaux systêmes en ont conservé l'usage.

Ces ravelins, quoiqu'ils resserrassent l'emplacement des batteries destinées à ruiner les flancs, ne les couvroient cependant point assez au gré des anciens Ingénieurs; il restoit plus de place qu'il n'en faut pour l'établissement des contre-batteries. En conséquence ils éleverent des demi-lunes en avant de l'angle flanqué des bastions, s'assurerent par-là du terrein où l'ennemi pouvoit établir ses batteries contre les flancs, & en rendirent la construction beaucoup plus périlleuse. Mais cette maniere de fortifier, ne remplissant point encore toutes les vues qu'on s'étoit proposées, fut négligée pendant quelque temps.

Les contre-gardes, qui sont aussi très-anciennes (*f*), ont le même but que les demi-lunes dont on vient de parler : elles servent à couvrir les flancs, que l'ennemi ne peut ruiner qu'en

(*f*) Pasino, dont on a déja fait mention, s'attribue l'invention des contre-gardes, mais Speckle les a ensuite perfectionnées ; car les contre-gardes de cet Auteur n'étoient pas seulement bornées aux bastions, elles enveloppoient tout le corps de la place.

établiſſant les contre-batteries ſur la contregarde même, ce qui eſt preſqu'impraticable quand le profil en eſt bien pris; ou bien il eſt obligé de démolir une partie de cet ouvrage, afin de découvrir le flanc & s'établir ſur la contreſcarpe. Mais cette opération préſente de grandes difficultés, elle expoſe l'aſſiégeant à des dangers qu'il retrouve encore quand il s'agit de battre en breche. Malgré ces avantages que les François n'ont pu méconnoître au ſiege de Turin, ils n'ont point admis les contre-gardes dans leurs nouveaux ſyſtêmes de fortification; le peu d'ouvrages qu'ils appellent ainſi dans quelques-unes de leurs places, n'ont que le nom de commun avec celles dont il eſt ici queſtion.

Il eſt aiſé de voir, par ce qui précede, que les anciens Ingénieurs ſe ſont plus appliqués que les modernes à bien couvrir les flancs, & que ce n'eſt point à ceux-ci que l'art de fortifier doit ſa perfection, comme l'ont voulu inſinuer quelques Ecrivains peu inſtruits. Il eſt certain que c'eſt la ſûreté des flancs qui conſtitue la la force d'une place : car, quand même tous les autres ouvrages ſeroient ruinés par les batteries de l'ennemi, tant que les flancs ſubſiſtent, il n'eſt pas poſſible d'approcher du corps de la place. La plupart des Ingénieurs modernes n'ayant pas fait aſſez d'attention à cette circonſtance, on ne peut diſſimuler qu'ils n'aient mal ſaiſi les vrais principes de cet art : leurs diſputes ne rouloient le plus ſouvent que ſur quelques toiſes de plus ou de moins à donner à la longueur des courtines, des faces ou des flancs, ou à quelques degrés dans l'ouverture d'un angle, tandis qu'ils négligeoient le point

effentiel, qui confifte à garantir les flancs du feu de l'affiégeant.

Cette négligence femble fondée fur quelques maximes de fortification mal entendues; fur celle-ci entr'autres, *qu'on ne peut voir l'ennemi fans en être vu* (*g*); d'où l'on tire cette conféquence, que fi du flanc on peut découvrir l'ennemi, celui-ci pourra auffi diriger le feu de fes batteries fur les flancs & les ruiner. Mais ce raifonnement manque de jufteffe, en ce que le flanc, quand il eft bien couvert, ne doit découvrir l'ennemi que dans les endroits où il lui eft impoffible d'établir des batteries, & où il feroit expofé au feu du flanc fans pouvoir l'éteindre. Il peut fe faire, par exemple, qu'un canon couvert par l'orillon, quoique caché aux batteries de l'affiégeant, puiffe cependant défendre le paffage du foffé, empêcher l'approche du corps de la place, & même prendre la breche de revers; or, dans tous ces endroits, il n'eft pas vraifemblable que l'ennemi puiffe oppofer des contre-batteries. La perfection des ouvrages qui couvrent les flancs, confifte donc à étendre l'efpace où l'ennemi fe trouve ainfi expofé.

D'autres Ingénieurs ont entrepris de rabaiffer le mérite de cette défenfe, en exaltant les avantages de la nouvelle maniere d'attaquer : ils prétendent qu'une place, quelque bien fortifiée qu'elle pût être, ne pouvoit tenir long-temps contre l'effort de l'affiégeant; ils penfent qu'une fois maître de la contrefcarpe, on l'étoit bientôt du corps de la place, & ils appuient ce fenti-

(*g*) Cette maxime eft préfentée fous ce point de vue dans la fortification de Pagan, ch. IV.

ment de l'exemple de plusieurs places très-fortes qui ont été forcées de se rendre en bien moins de temps qu'on auroit dû le présumer de la bonté de leur fortification. Si cela étoit ainsi, la dépense faite pour fortifier une place seroit en grande partie bien mal employée, puisqu'un simple rempart avec la contrescarpe feroit le même effet que les ouvrages les plus multipliés. Mais qu'on y réfléchisse attentivement, on verra que, quand une place est fortifiée avec art & défendue avec intelligence, la perte de la contrescarpe n'entraîne pas toujours celle du corps de la place (*h*). Il est vrai qu'une attaque brusquée & téméraire a souvent intimidé un Commandant craintif & sans expérience; mais si la défense d'une place est confiée à un Officier vigilant & expérimenté, il se tiendra en garde contre les surprises, il saura tourner à son avantage les entreprises prématurées de l'assiégeant, & le repousser avec perte: on a souvent vu l'ennemi forcé de renoncer à son entreprise, pour avoir trop précipité ses attaques (*i*).

Outre les moyens de couvrir les flancs rap-

(*h*) Au dernier & fameux siege de Barcelone, la perte de la contrescarpe, qui fut prise en 14 jours, n'entraîna point la reddition de la place; elle se défendit encore vigoureusement, quoiqu'ouverte par plusieurs breches.

(*i*) Landsberg, Ingénieur au service des Etats-Généraux, rapporte dans ses ouvrages plusieurs exemples des difficultés & des périls auxquels les Alliés furent exposés pendant la derniere guerre. Ces accidens ne provenoient, selon cet Auteur, que de la précipitation des attaques; ceux qui les conduisoient, en resserroient le front pour aller plus vite, & laissoient derriere eux les ouvrages de l'ennemi, ce qui rendoit leurs progrès presqu'impossibles.

portés ci-dessus, on en a imaginé d'autres d'une espece différente, mais d'une construction trop singuliere pour mériter quelqu'attention : telle est une ligne qui traverse le fossé depuis la pointe du bastion jusqu'à l'angle opposé de la contrescarpe. Cette méthode est rapportée dans les Mémoires de Montécuculli, comme sujette à beaucoup moins d'inconvéniens qu'il ne semble au premier aspect (*k*). Cependant quoiqu'une ligne ainsi dirigée mette le flanc à couvert des batteries établies sur la contrescarpe, & soit d'une facile construction, on n'en a point encore fait usage.

Une autre maniere de garantir les flancs, est de placer l'angle rentrant de la contrescarpe, ou du ravelin, entre le flanc & les contre-batteries. Cette méthode est décrite par Errard de Bar-le-Duc (*l*), & l'on en attribue la premiere idée au Comte de Lynar. Quoique plusieurs Auteurs, pour n'avoir point saisi tous les avantages de cette méthode, aient désapprouvé qu'une partie du fossé ne pût être apperçu du flanc, suite nécessaire de cette construction, néanmoins elle a été adoptée & recommandée par des Ingénieurs célebres, & l'on s'en est servi pour couvrir des flancs dans la fameuse fortification de Berg-ob-Zoom.

Les contre-mines fournissent un autre moyen

(*k*) Voyez les *Memorie del General Principe di Montecuculli*, pag. 116.

(*l*) La fortification démontrée liv. III. ch. 2. Outre cette invention, on trouve dans le même Auteur le projet d'une galerie pratiquée sur le chemin couvert, avec des ouvertures sur le fossé, qui a été exécuté à Tournai, & plus complétement à Berg-ob-Zoom, liv. IV. ch. 7.

de défenfe fupérieur à toutes les méthodes ufitées jufqu'à préfent, & qu'on peut utilemeut employer lorfque la nature du terrein le permet. Car fi, par la nature de la fortification, une place n'a de force qu'autant qu'il en faut pour empêcher l'ennemi de battre en breche ou de ruiner les flancs, avant l'établiffement de fes batteries fur le glacis, ce qui n'exige qu'un profil convenable & un ravelin au devant de la courtine, pourvu qu'on ne trouve point d'eau jufqu'à une certaine profondeur; il eft certain que les affiégés pourront, par le moyen des mines, renverfer les batteries ennemies, & répéter même plufieurs fois cette opération, felon la qualité du terrein; ce qui leur donne un avantage bien décidé fur les affiégeans, puifque l'emplacement des batteries de ceux-ci étant déterminé & prévu, comme on le fuppofe, il fera toujours poffible de préparer la défenfe, & l'ennemi n'aura d'autre reffource pour en empêcher l'effet, que d'éventer les mines.

C'eft à Naples qu'on fit pour la premiere fois un ufage avantageux des mines dans l'attaque, lorfque Pierre Navarre fe rendit maître d'une forterefle (2) défendue par une garnifon françoife. Le fiege de Candie en 1666, 1667 & 1668, offre le premier exemple mémorable de l'emploi des mines dans la défenfe d'une place, dont les affiégeans eurent beaucoup à fouffrir. Ce n'eft pas qu'avant cette époque on ne s'en fût fervi, mais avec moins de fuccès; & nous ne citons le fiege de Candie, que parce que les affiégés employerent princi-

(2) Le Château de l'Œuf.

palement les mines pour s'oppofer aux efforts des Turcs, & que par ce moyen il fe foutinrent pendant trois années. On commença alors à mieux fentir tous les avantages des contremines dont le fiege de Turin en 1706 fournit le dernier exemple remarquable : les mines arrêterent long-temps les entreprifes de l'ennemi, qui, après quatre mois de tranchées ouvertes, n'étoit encore parvenu qu'à la contrefcarpe, & là, par un effet terrible de ces feux fouterreins, les affiégés firent fauter en l'air une batterie de onze pieces de canon, trois ou quatre jours avant la reddition de la place.

Je ne puis me difpenfer, avant d'abandonner ce fujet, de faire mention des grandes vues fur l'ufage & la perfection des mines, que l'on trouve dans une differtation inférée à la fin du troifieme volume du Polybe françois (*m*) : on y traite de la maniere la plus fatisfaifante des diverfes fortes de mines & de leurs avantages; il eft vrai que ce que l'Auteur y dit de la forme de l'excavation n'eft point à l'abri de toutes difficultés; mais cette confidération n'influe en rien fur la difpofition des fourneaux, qui eft parfaitement bien imaginée, foit pour ménager le terrein & en tirer le meilleur parti poffible, foit pour inquiéter l'ennemi & ruiner les établiffemens.

Après avoir parlé des erreurs où font tombés

(*m*) Il eft dit dans la Préface que cette differtation eft de M. de Valliere, Maréchal des Camps & Capitaine général des Mines. (Depuis Grand-Croix de l'Ordre royal & militaire de St. Louis, Lieutenant-Général des Armées du Roi, & Infpecteur-Général de l'Artillerie).

la plupart des Ingénieurs modernes qui ont proposé des nouveaux systêmes de fortification, je ne dois pas manquer de rendre au célebre Coehorn toute la justice qu'il mérite: cet Auteur a publié deux Ouvrages sur l'art de fortifier; le premier contient une méthode pour fortifier un pentagone, avec un projet pour perfectionner les fortifications de Coevoerden. Le second présente trois différens systêmes; le premier applicable à un exagone, le second à un eptagone, & le troisieme à un octogone. L'Auteur y enseigne en outre la maniere de fortifier les côtés d'une place qui sont sur le bord d'une riviere. Il examine dans cet Ouvrage tous les genres d'attaque dont sa fortification est susceptible, & montre par-là toute la supériorité de sa défense. Ainsi l'on peut regarder cet Ouvrage, en partie, comme un traité de l'attaque & de la défense, & en partie comme un systême de fortification; c'est en général le meilleur Ouvrage que nous ayons sur ce sujet; écrit d'abord en hollandois, traduit ensuite en françois & en anglois, mais très-imparfaitement, on en donna une nouvelle édition françoise, publiée en Hollande; l'Editeur a corrigé beaucoup de fautes, éclairci plusieurs difficultés, & paroît avoir bien saisi la pensée de l'Auteur.

Quoique ce grand homme fut le plus habile Ingénieur de son temps, ses Ecrits ne lui attirerent pas d'abord toute la considération qu'il avoit droit d'en attendre: long-temps en butte à la cabale de ses contemporains, il ne commença qu'au siege de Namur à surmonter les obstacles que l'envie & le préjugé opposoient

à ſa réputation, par ſa belle & vigoureuſe défenſe du fort Guillaume. C'eſt-là l'époque de l'avancement rapide qu'il fit dans les grades militaires auxquels il parvint ſucceſſivement; il acheva d'immortaliſer ſon nom, par la conduite du ſiege de Namur, ſous le regne du Roi Guillaume, par les ſieges de Bonn, de Limbourg, de la citadelle de Liege & d'autres endroits. Sa mort, arrivée au commencement des dernieres guerres de Flandres, fut très-fatale aux Alliés : preſque tous les ſieges qu'ils entreprirent après l'année 1707, en furent une triſte preuve. La fortification de Berg-ob-Zoom eſt ſon dernier ouvrage, & quoiqu'il n'ait pas eu le temps d'y mettre la derniere main, il lui fait un honneur infini. On convient cependant que les fortifications de cette place ne ſont point à l'abri de toute critique, & qu'il y a des fautes eſſentielles dans pluſieurs ouvrages, qui, malgré cela, ſont ſuſceptibles de la plus grande défenſe.

On conçoit avec peine qu'avec la réputation bien méritée que le Général Coehorn s'eſt acquiſe par ſes ſervices, on ait fait ſi peu d'attention à ſes Ecrits. Cette négligence n'auroit-elle pas ſa ſource dans la rivalité de deux nations voiſines, dont les intérêts oppoſés répandent ordinairement quelque nuages ſur le mérite de leurs découvertes reſpectives? Quoi qu'il en ſoit, j'ai tout lieu de croire que, par la ſuite, on rendra plus de juſtice à l'Auteur, & que ſa réputation prendra de nouveaux accroiſſemens; on en peut juger par l'une des principales places frontieres de France, à laquelle on a ajouté un ouvrage qui eſt viſiblement pris des deſſins de Coehorn.

Parmi les Auteurs modernes qui ont écrit ſur la fortification, il en eſt deux qui ont traité de l'art d'attaquer & de défendre les places; ſujet étroitement lié à l'art de fortifier, & dont il eſt juſte de faire une mention honorable: je veux parler du Général Goulon, & du Maréchal de Vauban. Nous avons du premier un traité intitulé: *Mémoires ſur l'attaque & la défenſe des places*, dans lequel il donne les principales maximes qui doivent ſervir de regles dans ces opérations. Le ſecond a donné un Ouvrage qu'il a préſenté manuſcrit au feu Roi de France [Louis XIV]; il s'en eſt d'abord répandu pluſieurs copies, & on l'a enfin imprimé en Hollande, il y a quelques années. M. de Vauban y expoſe dans un grand détail les parties de l'attaque qui ſont de ſon invention: les batteries de ricochet, les paralleles, & ſur-tout la conduite de la ſappe. Il y donne outre cela de très-bonnes inſtructions ſur toutes les autres parties de cet art; de ſorte que ce traité peut paſſer à juſte titre pour le chef-d'œuvre de l'expérience conſommée & de l'intelligence de ce grand homme.

On s'attend peut-être que je parlerai avec les mêmes éloges de la capacité de cet Ingénieur dans l'art de fortifier; mais comme il n'a point laiſſé d'Ecrits ſur cette matiere, on m'excuſera ſans doute de ne pas le comprendre ſur la liſte des Auteurs de fortifications. D'ailleurs, à en juger par ce qui exiſte de ſes ouvrages, il paroît que la conſidération dont il jouit eſt moins fondée ſur ſes talens pour la fortification, que ſur ſes autres qualités. Génie ſupérieur à bien des égards, je ne penſe pas que,

relativement à l'art de fortifier, on puiſſe le mettre en comparaiſon avec ſon contemporain Coehorn.

Ce que je viens de dire, ſuffit pour donner une idée de l'origine de l'Architecture militaire, & des divers changemens qu'elle a ſubis. Paſſons maintenant à d'autres objets, qui ont un rapport plus immédiat avec le traité ſuivant, ſavoir, l'invention de la poudre à canon, l'origine de l'Artillerie, ſes progrès, & les différentes théories qui leur ont donné naiſſance.

On attribue communément l'invention de la poudre à canon à un Moine allemand, nommé Barthold Schwartz, qui en fit, dit-on, la découverte vers l'an 1320; & l'on croit que c'eſt en 1380 qu'elle fut employée pour la premiere fois à la guerre, par les Vénitiens contre les Génois. Mais ces deux opinions ſont évidemment fauſſes, car Roger Bacon, qui vivoit environ 50 ans avant Schwartz, fait mention d'une compoſition analogue à celle de la poudre, comme d'une choſe déjà connue de ſon temps; & l'on a des preuves inconteſtables que l'uſage de l'Artillerie eſt antérieur à l'année 1380. En effet, la découverte du ſalpêtre étant abſolument incertaine, il n'eſt pas étonnant qu'on ait ſi peu de lumieres ſur l'époque de l'invention de la poudre : ces deux découvertes ſont tellement liées entr'elles, qu'il ſeroit difficile de concevoir comment la premiere auroit pu ſe faire long-temps avant la ſeconde.

La principale propriété du ſalpêtre eſt d'augmenter conſidérablement l'inflammabilité des matieres combuſtibles auxquelles il eſt mêlé, quoique ce ſel ne ſoit par lui-même, ni inflammable, ni

ni combuſtible. Mis dans un creuſet & expoſé au feu le plus violent, il entrera ſeulement en fuſion, & rougira ſans brûler; mais lorſqu'il eſt en contact avec quelque matiere combuſtible, telle que le ſoufre & le charbon, il excite auſſi-tôt une inflammation très-active, & il s'en conſume une quantité d'autant plus grande, qu'il y a plus de matiere combuſtible dans le mélange. La détonnation du ſalpêtre a auſſi lieu, lorſqu'on en jette ſur un feu quelconque. Comment douter, après cela, que cette propriété du ſalpêtre ait pu être long-temps ignorée après la découverte de ce ſel? Il ſuffiſoit qu'il en tombât par haſard ſur une matiere embraſée, pour que cette propriété ſinguliere d'augmenter prodigieuſement l'activité de l'inflammation, ſe manifeſtât & fixât l'attention des ſpectateurs. Cette connoiſſance a dû bientôt conduire à la compoſition d'un mélange de ſalpêtre & de matieres combuſtibles, dont l'inflammation ſeroit plus prompte & plus violente que celle de toute autre matiere connue juſqu'alors. Or, la poudre à canon, actuellement en uſage, n'eſt autre choſe qu'un pareil mélange porté au plus haut degré de perfection.

Si l'on connoiſſoit donc l'époque de la découverte du ſalpêtre, rien de plus facile que de fixer à peu près le temps où l'on a pu, pour la premiere fois, compoſer un mélange ſemblable à notre poudre. L'opinion la plus commune eſt que le ſalpêtre a été découvert vers le neuvieme ſiecle par les Arabes, ou par les Grecs modernes; ces deux Peuples s'étant appliqués avec le même ſoin à la Chymie & à l'Alchymie. Le nom arabe de ce ſel eſt même relatif à ſa force

d'explosion ; & le feu Grégeois, employé à la guerre sous les derniers Empereurs Grecs, ne pouvoit être qu'une composition où il entroit du salpêtre, s'il faut en croire les Historiens sur les effets terribles qu'ils en racontent.

Des Auteurs modernes, trompés sans doute par la même signification qu'on donne à présent aux noms de salpêtre & de nitre, prétendent que la découverte du salpêtre est encore plus ancienne : mais tous les Chymistes conviennent aujourd'hui que la substance connue des anciens sous le nom de nitre, & dont Pline a donné la description, étoit un sel tout-à-fait différent de celui que nous appellons salpêtre.

Mais sans chercher d'autres preuves, il suffit de consulter Bacon & Marcus Græcus, pour s'assurer de l'ancienneté de la poudre ou d'un mélange analogue : le premier parle d'une composition qu'il ne rapporte pas comme une nouveauté, mais comme un moyen de destruction connu depuis long-temps & employé à la guerre; il dit même expressément (*n*) qu'on se servoit de son temps de mélange de salpêtre avec d'autres matieres pour les feux de réjouissance. Le second s'énonce encore plus clairement dans son Traité

(*n*) Bacon dit que, par le secours de l'art, on peut imiter le bruit du tonnerre, le surpasser même, & produire des feux plus brillans que les éclairs ; qu'on pourroit, par le même moyen, détruire une ville & une armée. Il pense aussi que c'est par des artifices de cetre espece, que Gedéon détruisit les Madianites. Après avoir parlé ailleurs des mêmes choses en d'autres termes, il continue ainsi : *Et experimentum hujus rei capimus ex hoc ludicro puerili, quod fit in multis mundi partibus, scilicet ut instrumento facto ad quantitatem pollicis humani ex*

intitulé *Liber ignium* (*o*) ; il y parle de deux especes de feux d'artifice ; les uns volans, & les autres qui éclatent avec bruit : il propose pour les feux volans des cartouches longues & étroites ; que la composition soit bien battue & fortement comprimée. Pour l'autre espece de feu, les cartouches doivent être courtes & épaisses, bien étranglées par les deux bouts & chargées seulement à moitié. La composition qu'il prescrit pour chacun de ces feux, est de deux livres de charbon, une livre de soufre & six livres de salpêtre, le tout pulvérisé & bien mélangé dans un mortier de pierre. Quoiqu'on ignore le temps où cet Auteur a vécu, il y a toute apparence que c'étoit avant que l'Artillerie fût employée à la guerre, puisqu'il n'est point fait mention de cet usage dans aucun endroit de son livre. D'ailleurs, comme il ne se donne pas pour l'inventeur de ces fusées & pétards, ainsi qu'on les nomme aujourd'hui, & qu'il n'en parle même pas comme d'une chose nouvelle, il est à présumer qu'ils étoient connus long-temps avant lui.

Il paroît que la poudre a été employée à la guerre vers le commencement du quatorzieme siecle. Bacon qui proposa, vers l'an 1280, d'em-

---

violentiâ illius salis, qui salpetræ vocatur, tam horribilis sonus nascitur, tam modicæ rei scilicet modici pergameni, quòd fortis tonitrui rugitum & corruscationem maximam sui luminis jubar excedit.

Voyez la Préface du Docteur Jebb, sur son édition de *Baconis Opus majus*.

(*o*) C'est un manuscrit qui est entre les mains du Docteur Mead ; mais ce qu'on y rapporte se trouve confirmé par l'Editeur de *Baconis Opus majus*, dans la Préface.

ployer sa forte explosion pour détruire les villes & les armées, en donna peut-être la premiere idée; & le Moine Schwartz, au lieu d'être l'inventeur de la poudre, ne s'est vraisemblablement occupé qu'à l'appliquer au métier de la guerre; la maniere dont on raconte qu'il a fait cette découverte favorise beaucoup cette conjecture (*p*). Peut-être aussi que les différentes manieres dont on exécuta l'idée de Bacon, & les changemens faits aux premiers essais en ce genre, ont donné lieu aux différentes dates que les Historiens ont assignées à l'origine de l'Artillerie.

Dans les commencemens de cet art, la poudre étoit beaucoup moins forte que celle dont on se sert aujourd'hui (*q*), & même que celle dont *Marcus Græcus* a rapporté la composition;

(*p*) Voici comment on raconte le fait: Schwartz ayant pilé dans un mortier les matieres qui composent la poudre, & mis une pierre par dessus, une étincelle tomba par hasard dans le mortier, mit le feu à la composition, & lança la pierre à une grande hauteur. Or, nous avons fait voir que Schwartz, qui étoit un Chymiste, ne pouvoit pas être le premier inventeur de cette composition, connue long-temps avant lui: cet accident ne peut donc que lui avoir donné l'idée d'employer la poudre à la guerre, plus utilement qu'on ne l'avoit fait auparavant, car Bacon paroît n'avoir envisagé la poudre que comme propre à endommager par sa flamme les corps qui l'environnent. Le nom & la figure du mortier qu'on donnoit dans l'ancienne Artillerie à une espece d'arme à feu, l'usage qu'on en faisoit pour lancer des pierres, mettent le sceau de la vérité à nos conjectures.

(*q*) Voyez Tartalea, dans ses *Quesiti & Invent.* lib. 3. quest. 5. où il rapporte vingt-trois différentes sortes de compositions, en usage en différens temps. La premiere, qui étoit aussi la plus ancienne, étoit un mélange de parties égales de salpêtre, soufre & charbon.

mais c'étoit moins par ignorance, que pour se conformer à la foiblesse des premieres pieces. En effet, les canons étoient alors très-courts, difformes; ce n'étoit qu'un assemblage de plusieurs barres de fer forgées ensemble suivant leur longueur, & assujetties par des cercles de fer. Etant destinées à remplacer les anciennes machines de jet, on ne s'en servit d'abord que pour lancer de grosses masses de pierre de figure sphérique; mais on s'apperçut bientôt des difficultés qu'entraînoient les transports & la manœuvre de ces énormes machines. Voyant d'un autre côté que des boulets de fer, beaucoup moins gros, produisoient plus d'effet, quand ils étoient chassés par une suffisante quantité d'une poudre plus forte; on ne tarda point à changer la matiere & la forme des premieres pieces, & l'on parvint ainsi à faire des canons de bronze, qui, quoique plus légers & plus faciles à manœuvrer, étoient cependant plus forts, eu égard à leur calibre, & capables de résister à une plus grande charge de poudre plus forte que celle qui étoit en usage auparavant. On lançoit par ce moyen des boulets du poids de quarante à soixante livres, dont la vîtesse & la force étoient beaucoup plus considérables que celles des masses de pierre (*r*).

(*r*) L'époque de ces changemens, & les avantages qu'on en retira, sont rapportés dans Guichardin, qui, en parlant de l'invasion des François en Italie, en l'an 1494, s'énonce ainsi : — *Et per unirsi con questo esercito, erano state condotte per mare à Genova quantità grande d'Artiglierie, da battere le muraglie, e da usare in campagna, ma di tale sorte, che giamai non haveva veduta Italia le simiglianti. Questa peste, trovata molt'anni inanzi in Ger-*

Quoique la poudre eut déjà dès-lors toute la perfection qui peut résulter de la juste proportion des matieres qui la composent (*f*), elle

---

mania, fu condotta la prima volta in Italia da Veneziani; nella guerra che, circa l'anno della salute 1380, hebbono i Genovesi con loro. — Il nome delle maggiori era bombarde, le quali, sparsa dopo questa inventione per tutta Italia, s'adoperavano nell'oppugnatione delle terre; alcune di ferro, alcune di bronzo, ma grossissime, in modo che per la machina grande e per l'imperitia degl'huomini, e mala attitudine degl'instrumenti, tardissimamente e con grandissima difficulta si conducevano; piantavansi alle terre con medesimi impedimenti, e piantate era dall'un colpo all'altro tanto intervallo, che con piccolissimo frutto, à comparatione di quello che seguito dopo, molto tempo consumavano, dunde i defensori de luoghi oppugnati havevano spatio di potere otiosamente fare di dentro ripari e fortificationi. — Ma i Francesi fabricando pezzi molto più espediti, ne di altro che di bronza, i quali chiamavano canoni, ed usando palle di ferro, dove primà di pietra, e senza comparatione più grosse e di peso gravissimo, s'usavano, gli conducevano su le carette, tirate (non da buoi, come in Italia si costumava) ma da cavalli, con agilità tale d'huomini, e d'instrumenti deputati à questo servigio, che quasi sempre al pari degl'eserciti caminavano, e condotte alle muraglie, erano piantate con prestezza incredibile, interponendosi dall'un colpo all'altro piccolissimo intervallo di tempo, si spesso e con impeto si gagliardo percotevano, che quello che primà in Italia fare in molti giorni si soleva, da loro in pochissime hore si faceva. Guicciardini, Histor. lib. 1. page 45. Ce que cet Auteur dit de l'énorme grosseur des pierres en usage dans l'ancienne Artillerie, se concevra mieux, si l'on se rappelle qu'au siege de Constantinople par Mahomet II. en 1453, on battoit les murailles avec des globes de pierre qui pesoient jusqu'à 1200 livres; mais on ne pouvoit en lancer que quatre par jour avec chaque piece.

(*f*) On voit dans Tartalea, que la poudre à canon (*polver grossa moderna*), étoit alors composée de quatre

péchoit encore par la forme : on ne l'employoit d'abord que réduite en une poussiere très-fine, & telle qu'elle sortoit du mortier où les matieres avoient été pulvérisées & mélangées ; on la grena ensuite, moins peut-être dans la vue d'en augmenter la force, que pour la rendre plus propre à être chargée dans les petites armes à feu ; attendu que long-temps après, l'usage de la poudre grenée étoit borné à ces sortes d'armes, tandis que pour le canon on employoit constamment le pulvérin : mais convaincu enfin que la poudre grenée avoit plus de force, parce que la flamme trouve un passage plus libre entre les grains, elle fut préférée à l'autre entiérement abandonnée (*t*).

---

parties de salpêtre, une partie de soufre & une partie de charbon ; pour les mousquets, de 48 parties de salpêtre, 7 parties de soufre, & 3 parties de charbon, & aussi de 18 parties de salpêtre, 2 parties de soufre & 3 parties de charbon. Ces compositions de la poudre à mousquet, approchent beaucoup de celle de notre poudre moderne, puisque sur cent livres de poudre, il n'y a qu'une livre de salpêtre pour la premiere, & trois livres pour la seconde, de plus que dans celle d'à présent.

(*t*) C'est un fait incontestable, que la poudre a d'abord été employée en pulvérin ; que longtemps après on s'est servi de la poudre grenée pour les petites armes, tandis que le pulvérin servoit encore pour les canons. Tartalea assure positivement, dans ses *Quesiti*, lib. 3. quef. 9 & 10. que la poudre à canon étoit alors du pulvérin, & que la poudre à mousquet étoit grenée : & notre Compatriote William Bourne, dans son *Art of shooting in great ordonnance*, qui parut quarante ans après Tartalea, nous dit, chap. 1. que la poudre à coulevrine (qu'il met en opposition avec la poudre grenée), doit être aussi fine que le sable & la poussiere : & au chap. 3. que deux livres de poudre grenée chassent aussi loin que trois livres de

Digitized by Google

Les deux derniers fiecles ont peu ajouté à la perfection de l'Artillerie, quant aux proportions des pieces, puifqu'elles font à peu près les mêmes que du temps de Charles V. Il eft vrai qu'on a fouvent propofé, & même éprouvé des pieces plus courtes & plus légeres ; mais quoiqu'avantageufes à plufieurs égards, leur ufage étant borné à quelques cas particuliers, il ne paroît pas qu'elles aient été adoptées. Les progrès de l'Artillerie, quant à la maniere de s'en fervir, ont été plus fenfibles & plus décidés : on obtient aujourd'hui avec des pieces d'un moindre calibre les mêmes effets qu'on ne fe procuroit autrefois qu'avec les plus gros calibres. Les coups d'une piece de 24, quoique moins forts que ceux du 48, ont été reconnus fuffifans, eu égard aux profils actuellement ufités dans les ouvrages de fortification ; ajoutez qu'elles font plus commodes à manœuvrer, plus faciles à tranfporter, & d'une plus grande économie pour les munitions. On a auffi perfectionné la maniere de battre en breche, en attaquant le revêtement dans toute fa longueur, & le plus bas qu'il eft poffible, fur une ligne horizontale, avant d'en entamer la partie fupérieure. Cette

poudre de coulevrine. On voit de plus dans le Dictionnaire de Marine de Henri Mantzwairing, dédié au Duc de Buckingham, fous Charles I. au mot *Poudre*, qu'on emploie deux efpeces de poudre : l'une nommée poudre de coulevrine, qui n'eft point grenée, mais en pulvérin ; & l'autre qui eft grenée : quoiqu'il ajoute que la premiere efpece n'eft point en ufage fur mer, je crois néanmoins qu'alors la poudre étoit affez généralement grenée, car les Ecrivains étrangers avoient déjà recommandé depuis longtemps l'ufage de la poudre en grains.

pratique ne ſe trouve dans aucun ancien Auteur ; Gabriël Buſca (*u*), qui fait beaucoup valoir ſon expérience, preſcrit préciſément le contraire. Il eſt vrai que Collado en fait mention, mais ſeulement comme d'une pratique en uſage chez les Turcs (*x*), ſans l'approuver ni la propoſer comme un exemple à imiter.

Une découverte plus importante encore, c'eſt la méthode de tirer avec une petite charge, & de diriger la piece de façon que le boulet ne faſſe que franchir le parapet de l'ennemi pour enfiler l'ouvrage qu'on veut attaquer : le boulet tombant alors à terre ſous un angle très-aigu, & avec très-peu de viteſſe, parcourt en roulant & bondiſſant les branches des ouvrages qui ſont dans ſa direction, démonte les batteries qui y ſont établies, & cauſe par-là plus de dommage à l'ennemi, que ſi l'on attaquoit ces ouvrages de plein fouët. Le Maréchal de Vauban,

(*u*) Voyez ſon *Inſtruzzione de Bombardieri*, imprimé à Carmagnola en 1584, chap. 37. où il conſeille de commencer la breche par le haut du revêtement, & de continuer enſuite en deſcendant.

(*x*) Voyez *Pratica manuale di Artiglieria, dal magn. ſignor Luigi Collado Hiſpano, Bertico, Hebriſenſe*, imprimé à Veniſe en 1586, chap. 20. où il eſt dit : *Nelle ſattioni del Gran Turco — ſempre ſi adoperano i pezzi — da tagliare le muraglie per di ſotto di eſſe tranſverſalmente e di poi di alto in baſſo à perpendicolo, ed applicandovi poi tutti à un tratto i baſilichi ; con che fanno caſcar giù quella parte di muraglia che era già tagliata.* Ce livre eſt écrit en Italien, quoique l'Auteur fût eſpagnol ; mais il ſervoit en Italie dans l'armée eſpagnole, en qualité d'Ingénieur. Il dit dans la Préface qu'il ſe propoſoit d'en donner une édition en Eſpagnol ; c'eſt ſans doute cette édition que Blondel cite dans ſon *Art de jeter les bombes*.

qui a imaginé cette ingénieuse disposition, lui a donné le nom de *batterie à ricochet* (*y*), & l'a employée pour la premiere fois au siege d'Ath en 1692 (*z*).

Après ce court exposé de ce qui concerne la pratique de l'Artillerie, il est à propos de dire un mot des différentes théories qui ont paru de temps à autre, non qu'elles méritent beaucoup d'attention, mais à cause du rapport qu'elles ont avec le sujet que nous traitons, nous croyons devoir satisfaire à cet égard la curiosité du Lecteur.

Tartalea, célebre Mathématicien d'Italie, est le premier qui ait traité du mouvement des projectiles; c'est le même à qui l'on doit la résolution des équations cubiques communément attribuée à Cardan. Quoique l'état d'imperfection où étoit alors la méchanique ne lui permit d'établir sa théorie que sur de faux principes, il ne laissa pas de découvrir une propriété remarquable du jet des bombes; savoir, que la plus grande portée s'obtient sous l'angle de quarante-cinq degrés. Il a aussi soutenu, contre l'opinion générale de ses Contemporains, qu'aucune partie du chemin parcouru par un boulet n'étoit une ligne droite, bien que dans certains endroits la courbure fût presqu'insensible; vérité qu'il a conclu par analogie de la surface des eaux de la mer, qui, dans une petite étendue, paroît plane, quoique réellement cour-

(*y*) Voyez son Traité, *de l'Attaque & de la Défense des Places.*

(*z*) Voyez le Journal de ce siege, imprimé à la fin de la derniere édition des Mémoires de Goulon.

bée vers le centre de la terre. Cet Auteur s'attribue aussi l'invention du quart de cercle d'Artillerie, & parle souvent d'une maniere ambiguë du succès de plusieurs méthodes qui lui avoient été proposées, & qu'on n'avoit pas encore soumises à l'épreuve. Mais ne présentant que des spéculations, les Praticiens s'éleverent contre ses opinions, qui furent attaquées dans les Ecrits de Busca, Collado (*a*), Ufano, Simienowitz, & de plusieurs autres. La philosophie de ce temps jouant souvent un grand rôle dans ces sortes de questions, il s'éleva des disputes sur le mouvement des corps projetés, particuliérement en Italie, où elles durerent jusqu'au temps de Galilée; ce qui donna vraisemblablement lieu à ses dialogues sur le mouvement, qui parurent en 1638. Dans cet intervalle, & avant que la doctrine de Galilée fût bien établie, on publia diverses théories sur le mouvement des boulets de canon, avec des tables de l'étendue des portées relativement à différentes élévations. Mais ces théories étoient toutes fausses & démenties par l'expérience, quoique leurs Auteurs fussent très-exercés dans la pratique de l'Artillerie; de ce

(*a*) Collado, chap. 43. conteste à Tartalea l'invention du quart de cercle d'Artillerie, & prétend que Daniel Santbech, ou Regiomontanus, (car il ne se rappelle pas lequel des deux) connoissoit cet instrument long-temps auparavant. Mais ce qu'il y a de vrai, c'est que le livre de Santbech dont il a voulu parler, & qui a pour titre, *Problematum Astron. & Geomet. sectiones septem*, n'a paru qu'en 1561, & par conséquent dans un temps postérieur à celui de Tartalea; quoique Santbech y parle des différentes élévations que l'on donne aux pieces, l'application du quart de cercle à cet usage lui étoit inconnue.

nombre font Ufano, Galeus, Ulrich, dont Blondel a parlé (*b*), & d'autres dont il ne fait point mention. Dans la multitude d'anciens Auteurs qui ont écrit fur cette matiere, il s'en trouve peu qui n'aient dirigé leurs fpéculations fur la diftinction des mouvemens naturels, violens & mixtes; & il eft aifé d'imaginer que leurs idées devoient peu s'accorder entr'elles.

Mais ce qui furprendra davantage, c'eft que dans toutes ces conteftations perfonne n'ait penfé à confulter l'expérience pour en déduire une théorie, ou en ait au moins tiré un parti avantageux. Collado nous a laiffé des réfultats d'épreuves faites fur les portées, avec un fauconneau de trois livres de balles, pour chaque point du quartier d'Artillerie; mais ces mêmes réfultats font voir qu'il n'avoit point employé la charge ordinaire & convenable à ce calibre (*c*). Notre Compatriote Bourne, dont le Traité parut un

(*b*) Il eft à remarquer que l'opinion difcutée par Blondel, dans fon *Art de jeter les bombes*, n'eft point originairement de Rivaltius, auquel il l'attribue, mais de Santbech, où Rivaltius l'avoit prife.

(*c*) Il réfulte de ces expériences, que la portée horizontale étoit de 268 pas; qu'à un point d'élévation (qui eft le $\frac{1}{12}$ du quartier d'Artillerie, ou $7\frac{1}{2}$ degrés), la portée étoit de 594 pas; à deux points, de 794 pas; à trois points, de 954 pas; à quatre points, de 1010 pas; à cinq points, de 1040 pas; & à fix points, de 1053 pas. Lorfque la piece avoit fept points d'élévation, la portée étoit entre celles du troifieme & du quatrieme point; à huit points d'élévation, entre celles du fecond & du troifieme; à neuf points, entre celles du premier & du fecond; à dix points, entre la portée horizontale & celle du premier point; à onze points, le boulet tomba très-près du canon. Voyez le chap. 61. Notez qu'il n'eft pas queftion ici de pas géométriques, mais de pas communs.

an après celui de Collado, ſubſtitue les degrés de la circonférence du cercle aux points du quartier d'Artillerie ; il compare les portées ſous différentes élévations avec celles du tir horizontal (*d*) ; mais il a commis une faute eſſentielle, en oubliant d'indiquer l'eſpece de canon qu'il a employé pour ſes épreuves : car on verra dans la ſuite que le rapport des portées ſous différens angles dépend beaucoup de la vîteſſe, du diametre & du poids du boulet. Enfin, l'on trouve des expériences dans deux autres Auteurs Anglois, Eldred & Anderſon: celui-ci, trop prévenu en faveur de la fauſſe théorie qu'il avoit imaginée, ſemble y avoir fait plier l'expérience plutôt que de l'avoir conſultée. Nous aurons occaſion d'en parler plus au long. Mais Eldred mérite qu'on on faſſe une mention plus honorable (*e*). Ses principes ſont très-ſimples & approchent beaucoup de la vérité. Nous n'avons de cet Auteur que les portées de différentes pieces ſous de petites élévations, toutes au deſſous de dix degrés; ſes expériences, qui ſont

---

(*d*) La portée horizontale étant repréſentée par 1, la portée ſous cinq degrés d'élévation, eſt de 2 $\frac{2}{9}$; ſous dix degrés, de 3 $\frac{1}{3}$; ſous quinze degrés, de 4 $\frac{1}{3}$; ſous vingt degrés, de 4 $\frac{5}{6}$; & la plus grande portée, qui correſpond à quarante-deux degrés, eſt de 5 $\frac{1}{2}$. Selon que le vent eſt favorable ou contraire au tir, la plus grande portée peut varier depuis 45 juſqu'à 36 degrés. Voyez ſon *Art of shooting in great ordonnance*, chap. 7.

(*e*) Son Ouvrage eſt intitulé, *the Gunners glaſs;* & les expériences qu'il rapporte ont été faites, pour la plupart, au Château de Douvre, où il a réſidé pluſieurs années en qualité de Canonnier. Quoique la plus ancienne date de ces expériences ſoit de 1611, ſon livre n'a paru qu'en 1646.

en grand nombre, paroiſſent toutes avoir été faites avec beaucoup de ſoin & d'attention; il a même la bonne foi de rapporter celles qui ne s'accordent point avec ſa théorie; enfin, l'on voit qu'il étoit mieux verſé dans la pratique de l'Artillerie qu'aucun de ſes Confreres, dont toutes les connoiſſances étoient bornées à une ancienne routine, & qui, bien loin de faire des épreuves pour la perfection de leur Art, ne ſoupçonnoient même pas qu'il en fût ſuſceptible. Pluſieurs théories qui ont paru depuis Galilée, en ſont une preuve inconteſtable. Cet Auteur celebre expoſe dans ſes Dialogues les Loix générales que la nature obſerve dans la production & le changement du mouvement. Il eſt le premier qui ait conſidéré les effets de la peſanteur ſur les corps projetés, & il en conclut qu'abſtraction faite de la réſiſtance de l'air, la courbe décrite par un boulet eſt une parabole. On trouve même dans ſon Ouvrage la maniere de déterminer les effets de cette réſiſtance, & les changemens qu'elle produit ſur le mouvement du boulet à différentes diſtances du canon.

Avec ces lumieres, n'étoit-il pas à préſumer qu'on s'efforceroit enſuite à mieux connoître les effets de la réſiſtance de l'air, & à s'aſſurer ſi, dans l'Artillerie, on devoit avoir égard, ou non, à cette circonſtance? Bien au contraire, au lieu de s'appliquer à ces recherches, on a ſoutenu à tout haſard & ſans aucune preuve, que l'air ne peut être un obſtacle ſenſible au mouvement des boulets, & l'on fondoit cette ridicule opinion ſur la grande diſproportion qui ſe trouve entre la denſité de l'air & celle des corps ſo-

lides. Sur ce principe, qui, à force d'être cité & répété, passa pour incontestable, il fut décidé que le mouvement des corps projetés se faisoit dans une courbe sensiblement parabolique. C'est le sentiment d'Anderson, dans son Traité, *The genuine use and effects of the gun*, publié en 1674, où il se donne même la peine de répondre à toutes les objections qu'on peut faire contre cette théorie.

En 1683 parut à Paris *l'Art de jeter les bombes*, par M. Blondel: on y retrouve la doctrine de Galilée sur le mouvement des bombes dans différens cas, & des considérations sur les changemens produits par la résistance de l'air; mais après beaucoup de recherches, cet Auteur conclut que les effets de l'air se réduisent à si peu de chose, qu'ils ne changent presque rien aux résultats des principes qu'il a établis (*f*). Ce sujet se trouve aussi traité dans nos Transactions philosophiques (*g*) par le D. Halley: il prétend que vu la grande différence qu'il y a entre la pesanteur des boulets & celle de l'air, il est très-vraisemblable que la résistance de ce fluide est à peine sensible. Il ajoute néanmoins qu'on ne doit point négliger d'y avoir égard, lorsqu'il est question de corps légers.

Malgré cette opinion, très-commode sans doute pour ceux qui s'arrêtent à la simple spéculation, Anderson s'étoit convaincu par un grand nombre d'expériences faites sur de petites vitesses, que la courbe décrite par les projectiles

(*f*) Voyez la page 345 de la premiere édition *in*-4°. ainsi que la page 355 & suiv.

(*g*) N°. 216. pag. 68.

ne pouvoit être parabolique : voyez ſon Traité intitulé *To hit a Marck*, imprimé en 1690. Mais trop attaché à ſes préjugés, il ne vit point dans la réſiſtance de l'air la cauſe des phénomenes qu'il obſervoit; il imagina que, dans les premiers inſtans de ſon mouvement, tout projectile décrivoit une ligne droite qui devenoit enſuite parabolique, & il ſuppoſa que cette droite, qu'il appelloit *ligne d'impulſion du feu*, étoit la même pour tous les angles d'élévation. Dans cette hypotheſe, il lui étoit facile, en déterminant l'étendue de cette ligne d'impulſion, de concilier deux portées ſous différens angles, quelque différence qu'il y eût entre ces portées & celles qu'avoient données les principes ordinaires; mais il eſt à croire qu'il n'eût pas réuſſi à en concilier trois; s'il l'a tenté, il ne peut qu'avoir reconnu l'inſuffiſance de ſa méthode. Si la réſiſtance de l'air produit déjà des changemens ſi ſenſibles ſur le mouvement des projectiles lorſqu'ils n'ont qu'une petite vîteſſe, combien l'air ne doit-il pas avoir d'influence ſur ce mouvement quand il eſt plus rapide? Car il eſt clair qu'à une vîteſſe trois ou quatre fois plus grande, l'air doit oppoſer une réſiſtance environ quinze fois plus conſidérable, comme nous le ferons voir dans la ſuite.

Il eſt ſans doute ſurprenant que la réſiſtance prodigieuſe que l'air oppoſe aux grandes vîteſſes ait échappé aux obſervations des Praticiens de l'Artillerie : mais il l'eſt encore plus qu'après la publication des *Principes de Newton*, Ouvrage dans lequel il détermine & confirme par des expériences la loi & la quantité de la réſiſtance aux petites vîteſſes, tous les Mathématiciens n'aient

n'aient pas été convaincus de l'effet très-ſenſible de cette force de l'air. Il eſt vrai que la même loi appliquée aux grandes viteſſes donne pour la réſiſtance une quantité beaucoup trop petite, comme Newton lui-même l'avoit déjà remarqué (*h*). L'action de l'air ſur les corps projetés ne peut donc être négligée ; cependant je ne connois qu'un ſeul exemple de l'application de cette doctrine au mouvement des corps projetés (*i*).

Concluons que juſqu'à préſent la ſcience de l'Artillerie n'a porté que ſur de faux principes, & que ſa théorie, dans l'état où elle eſt aujourd'hui, eſt inutile & défectueuſe dans la branche la plus importante.

C'eſt dans la vue de contribuer à la perfection de cette théorie, que j'ai entrepris l'Ouvrage ſuivant. J'y prouve au ſecond chapitre que les corps projetés ne ſe meuvent point dans une parabole. J'y détermine le degré de réſiſtance qu'ils éprouvent relativement à leur viteſſe ; &, comme dans le premier chapitre, je donne la maniere de déterminer cette viteſſe, la recherche de la courbe décrite par le projectile n'eſt plus qu'un problême géométrique, mais dont la ſolution, priſe dans toute ſa généralité, exige les calculs les plus difficiles & les plus compliqués. Néanmoins, pour les cas les plus ordinaires, on peut ſans peine le réſoudre par approximation, & ſe mettre ainſi

(*h*) Phil. nat. Princ. Math. pag. 351.
(*i*) Comment. Académ. Petrop. tome 2. pages 338, 339.

en état de comparer les résultats de l'expérience avec ceux de la théorie.

La force & l'action de la poudre, dont je traite aussi dans cet Ouvrage, est un sujet dont quelques Auteurs ont parlé avant moi, mais d'une maniere si vague & si obscure, qu'il est souvent impossible de démêler leur pensée. L'hypothese la plus intelligible, & qui paroît avoir donné naissance à toutes les autres, est celle de M. de la Hire. Il suppose que la force de la poudre est due à l'accroissement que la chaleur de la flamme, au moment de l'explosion, occasionne dans l'élasticité de l'air qu'elle contient, & de celui qui remplit les interstices des grains. Mais si l'on suppose que l'air contenu dans la poudre est dans son état naturel, comme l'est certainement celui qui est entre les grains; la chaleur de la flamme ne peut le rendre que cinq fois plus élastique qu'il n'étoit, & cette augmentation d'élasticité ne produiroit pas la deux centieme partie de la force qui se manifeste dans la poudre (*k*). Cette hypothese a fait naître plusieurs Dissertations & Traités sur le même sujet chez une Nation voisine; je ne m'arrêterai point à les réfuter; il suffit que j'aie établi dans cet Ouvrage, par les expériences les plus décisives, la véritable théorie de la force de la poudre.

Quoiqu'on ne puisse douter de la certitude des résultats que nous rapportons dans ce Traité, on nous reprochera sans doute de n'a-

(*k*) Voyez dans le Traité suivant, la Proposition V. du premier chapitre.

voir pas constaté la vérité de nos principes par des épreuves faites sur les portées de différentes pieces, & par la comparaison qu'on en auroit pu faire avec les résultats de la théorie. Il entroit bien dans mon plan de composer un chapitre sur ce sujet; mais j'en ai été détourné par les grandes irrégularités que l'on observe dans les portées, & qui ont rendu toutes mes peines inutiles : car la même piece tirée avec la même charge de poudre, donnoit souvent des portées très-inégales, de maniere que deux coups tirés dans les mêmes circonstances s'accordoient rarement ensemble (3), comme on le verra plus amplement dans la Proposition VII. du second chapitre. Malgré ces difficultés, qui m'ont empêché de faire mention dans ce Traité de quelques épreuves sur la portée des pieces de canon, & qui auroient pu servir à confirmer la théorie, je n'ai point encore abandonné ce dessein, & je me flatte d'avoir trouvé un moyen pour

(3) L'inégalité des portées d'une piece tirée avec la même charge, & avec les mêmes circonstances à tous autres égards, vient principalement des différentes directions que le boulet prend en sortant du canon ; si l'on veut donc se servir des portées pour en conclure la force d'une charge de poudre, il est nécessaire de connoître, non-seulement la situation du point de chûte du boulet, relativement à la bouche du canon, mais encore l'angle de départ du boulet, c'est-à-dire l'angle, que sa premiere direction au sortir de la piece, fait avec l'horizon; cet angle, sans lequel les portées sont un élément toujours incertain dans la théorie du mouvement des projectiles, je suis parvenu à m'en assurer la connoissance, par un moyen très-simple, dont je parlerai dans la suite.

éviter les irrégularités dont je viens de parler, sans lequel on tenteroit inutilement de faire de ces sortes d'épreuves (4).

Remarque sur le Discours préliminaire.

Ce que M. Robins dit de l'origine & des progrès, tant de l'Artillerie que de l'Art de fortifier, annonce une connoissance fort étendue des anciens Auteurs qui ont écrit sur ces deux Sciences. Les instructions qu'il donne, sur-tout concernant la pratique, paroissent fondées sur de bons principes, & sont tellement conformes à la vérité, qu'on peut les suivre avec confiance. Mais il semble n'avoir pas eu connoissance de plusieurs Traités, dans lesquels on trouve les principes du mouvement des boulets développés avec plus d'exactitude que dans ceux dont il a rendu compte ; ou s'il les a connus, ne les auroit-il passés sous silence que pour faire mieux valoir ses propres découvertes ? On diroit, d'après son exposé, qu'à peine avoit-on avant lui quelques notions de la nature du mouvement des boulets & de la force de la poudre. Il cite avec beaucoup de soin les Au-

(4) Il n'est pas possible de prévenir ni d'éviter les irrégularités des portées : elles sont produites par des causes qu'il n'est point en notre pouvoir de régler ni de prévoir. Mais si nous ignorons sous quel angle un boulet partira, nous pouvons au moins savoir, comme il a été dit dans la note précédente, sous quel angle il est parti, & découvrir par là, non-seulement une des principales causes de l'inégalité des portées, mais encore les effets de la résistance de l'air.

Digitized by Google

teurs qui ont perfectionné d'autres parties, & il ne nomme seulement pas ceux qui ont fait sur ces deux objets les plus belles découvertes.

Les Mathématiciens savent depuis long-temps que la trajectoire qu'un boulet décrit dans l'air, differe sensiblement de la parabole : mais la nature de cette trajectoire tenant à des calculs très-compliqués, n'a pu être déterminée avec la même facilité. Huyghens a démontré à la vérité que si la résistance de l'air étoit proportionnelle à la vîtesse du corps projeté dans ce fluide, cette courbe seroit une espece de logarithmique. Mais Newton a fait voir très-clairement que la résistance de l'air ne suivoit point le rapport des simples vîtesses, mais celui de leur quarré : il a tenté aussi, mais inutilement, de déterminer la nature de la courbe décrite par un corps qui éprouveroit cette résistance, & il a été obligé de s'en tenir à une approximation. Le même problême fut proposé en 1718, par Keil au célebre Jean Bernoulli, comme renfermant des difficultés que les Anglois n'avoient pas encore pu surmonter : celui-ci en donna la solution, même dans un sens beaucoup plus étendu qu'il n'avoit été proposé. Il en parut aussi tôt une autre dans la Phoromonie de Hermann, & une troisieme de l'ingénieux Taylor. Or, si M. Robins a trouvé que la résistance de l'air aux mouvemens rapides, est plus grande qu'on ne l'a cru jusqu'à présent, on ne peut pas dire que la solution de ce cas particulier ait été ignorée, puisqu'elle est comprise dans la solution générale. Il faut avouer en même temps qu'aucun Géometre n'avoit en-

core penſé à en faire une application utile à la pratique de l'Artillerie.

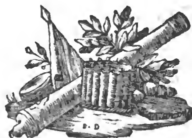
On trouve dans le ſecond tome des Mémoires de l'Académie de Pétersbourg pluſieurs expériences, par leſquelles le célebre Daniël Bernoulli fait voir de la maniere la plus évidente, combien eſt conſidérable l'effet de la réſiſtance de l'air ſur les corps qui, comme les boulets de canon, s'y meuvent avec une grande viteſſe: il réſulte de l'une de ces expériences, page 338, qu'un boulet qui, dans l'air, n'eſt monté qu'à la hauteur de 7819 pieds, auroit dû monter dans le vuide juſqu'à 58750 pieds. Mais notre Auteur qui cite cet endroit dans une autre vue, ne fait pas la moindre mention d'une obſervation auſſi remarquable.

Il en eſt de même de la théorie de la force de la poudre: M. Robins ne cite que celle donnée par de la Hire en 1702; théorie qui n'annonce point une connoiſſance bien profonde de la phyſique; comme ſi perſonne n'eût été plus heureux dans ce genre de recherche. Cependant Jean Bernoulli avoit déjà fait voir en 1690, dans ſa Diſſertation *de effervefcentiâ & fermentatione*, que l'air renfermé dans la poudre à canon y étoit fortement comprimé: car il conclut de pluſieurs expériences faites ſur l'exploſion de la poudre, que l'air contenu dans la poudre y eſt au moins cent fois plus denſe que dans ſon état naturel. Il eſt poſſible que M. Robins n'ait point eu connoiſſance de cette diſſertation de Jean Bernoulli; mais eſt-il vraiſemblable qu'il ait ignoré l'expérience de Papin rapportée dans les Tranſactions philoſophiques, par laquelle il

fait voir que le salpêtre contient un fluide très-élastique, dans lequel réside la force de la poudre, & que six grains de poudre contiennent au moins un grain d'air, qui y est par conséquent très-comprimé? On trouve encore dans les *Supplementi al Giornale de' Litterati d'Italia*, tome 1, nº. 8, qu'un savant, nommé *Brachus*, a conclu de plusieurs expériences faites sur la poudre, que l'air qu'elle renferme est quatre cents cinquante fois plus dense que l'air naturel.

M. Daniël Bernoulli a traité fort au long le même sujet dans son Hydrodinamique imprimé à Strasbourg en 1738: il y conclut (sect. 10) de plusieurs expériences, que l'air renfermé dans la poudre est dix mille fois plus élastique que dans son état naturel. Il suit de là que si l'élasticité suivoit le rapport de la compression, l'air seroit dix mille fois plus dense dans la poudre, & la poudre dix mille fois plus pesante que l'air de l'athmosphere; mais l'eau ne pese qu'environ mille fois plus que l'air, & la poudre pese à peu près autant que l'eau; cette hypothese ne peut donc se soutenir, quand même on voudroit que la poudre ne fût que de l'air comprimé. De là l'Auteur pense que dans les grandes compressions, l'élasticité de l'air croît en plus grande raison que la densité, & qu'il est possible que l'air condensé dans un espace mille fois plus petit que celui qu'il occupe dans son état naturel, acquiert déjà une élasticité dix mille fois plus grande. Cette hypothese s'accorde assez bien avec ce que nous connoissons des propriétés de l'air: mais comme M. Bernoulli a déduit ces conséquences de la résistance

de l'air, en la ſuppoſant proportionnelle au quarré de la viteſſe, & que M. Robins a trouvé cette réſiſtance beaucoup plus grande pour les mouvemens rapides ; ces conſéquences auront beſoin de quelques corrections, & peut-être ſera-t-on diſpenſé de ſuppoſer une auſſi grande élaſticité à l'air comprimé dans la poudre. C'eſt ce qui ſera diſcuté avec ſoin dans les remarques ſuivantes.





NOUVEAUX PRINCIPES D'ARTILLERIE.

CHAPITRE Ier.

De la force de la Poudre à canon.

PROPOSITION Iere.

Lorsqu'on allume de la Poudre à canon, son inflammation, soit qu'elle se fasse dans l'air ou dans le vuide, produit une matiere fluide, élastique & permanente.



SI l'on met un morceau de fer rougi au feu sous le récipient d'une machine pneumatique, & qu'après avoir pompé l'air, on y laisse tomber quelques grains de poudre, ils s'allumeront, & le mercure d'un barometre qui communique au récipient s'abaissera tout-à-coup.

Digitized by Google

Il eſt vrai qu'auſſi-tôt après il remontera, mais ſans atteindre ſa premiere hauteur; & il s'arrêtera à une élévation d'autant plus petite, qu'on aura allumé une plus grande quantité de poudre dans le récipient. Cette expérience, très-connue, ſe trouve avec toutes ſes circonſtances dans les tranſactions philoſophiques, n°. 295: Hauksbee, qui la rapporte, dit qu'ayant allumé une très-petite quantité de poudre de la maniere qu'on vient de le dire, la liqueur de l'index mercurielle, qui étoit à 29 $\frac{1}{2}$ pouces avant l'inflammation, s'abaiſſa juſqu'à 12 $\frac{1}{4}$ pouces; ce qui prouve inconteſtablement que par l'inflammation de la poudre dans le récipient, il ſe développe une matiere ſubtile, élaſtique, dont la force expanſive oblige le mercure de deſcendre, & démontre la vérité de notre propoſition, relativement à l'inflammation de la poudre dans le vuide. Pour faire voir enſuite que ce même fluide ne ſe diſſipe point, qu'il eſt permanent, Hauksbee dit à l'endroit cité, que quoique le mercure ait remonté immédiatement après l'exploſion de la poudre, il s'eſt cependant fixé le jour ſuivant à la hauteur de 22 $\frac{1}{4}$ pouces. Cet abaiſſement du mercure eſt auſſi une preuve de l'élaſticité & de la force expanſive du fluide renfermé dans les grains de poudre; car ce n'eſt point par ſa ſeule peſanteur qu'il auroit pu produire aucun effet ſenſible ſur le mercure. Ce fluide occupe toute la capacité du récipient; qu'il ſoit grand ou petit, le ſuccès de l'expérience eſt toujours le même. D'ailleurs, le mercure s'arrête à une hauteur d'autant plus petite, que le récipient qu'on emploie eſt plus grand, la quantité de poudre allumée étant la même.

Il suit de là que la force élastique du fluide produit par l'inflammation de la poudre diminue à mesure qu'il s'étend dans un plus grand espace, & qu'à cet égard il a les mêmes propriétés que l'air.

Cette expérience réussit également bien dans l'air : car si l'on met quelques grains de poudre dans la partie supérieure d'un tube de verre, que l'on plonge l'inférieure dans l'eau, jusqu'à ce qu'il ne reste au dessus de l'eau que la petite portion du tube qui contient la poudre, & qu'après l'avoir bouché exactement pour intercepter toute communication avec l'air extérieur, on allume la poudre par le moyen d'un verre ardent, on verra l'eau du tube s'abaisser tout-à-coup, comme le mercure dans l'expérience précédente, & s'arrêter plus bas qu'elle n'étoit avant l'inflammation de la poudre. La différence sera aussi d'autant plus grande, qu'on aura allumé une plus grande quantité de poudre, ou que le calibre du tube sera plus petit. Donc l'inflammation de la poudre, soit qu'elle se fasse dans le vuide ou dans l'air, produit une matiere fluide, élastique & permanente.

Scholie.

On avoit déjà observé du temps du célebre Boyle, que, par la fermentation & d'autres procédés chymiques, plusieurs substances produisent un fluide élastique, analogue, à bien des égards, à l'air naturel. On a trouvé aussi que plusieurs mélanges se pénétroient dans certaines circonstances d'une partie de l'air ambiant & qu'ils l'absorboient. On a spécialement remarqué

que tous les corps enflammés & toutes les vapeurs sulfureuses détruisoient une grande partie de l'air, soit en l'absorbant, soit en le privant de son élasticité. Ces différens effets des procédés chymiques sur l'air viennent d'être confirmés de la maniere la plus satisfaisante par les expériences de M. Hales, rapportées dans sa Statique des végétaux. Il suit de là que dans la derniere expérience la vapeur sulfureuse, produite par la poudre enflammée, a dû absorber une partie de l'air contenu dans le haut du tube; il feroit donc à propos de ne laisser dans le tube que le moins d'air qu'il est possible, de crainte que l'air absorbé, s'il y en avoit assez pour contrebalancer l'effet du fluide élastique de la poudre, ne fît manquer l'expérience.

Une autre raison pour ne laisser que très-peu d'air dans le tube de la derniere expérience, c'est que la chaleur de la poudre enflammée augmenteroit considérablement la force élastique de l'air qui y reste, & que, jointe à celle du fluide émané de la poudre, elle ne manqueroit point de faire éclater le tube, s'il y avoit une trop grande quantité d'air.

REMARQUE.

La premiere raison pour laquelle notre Auteur recommande de ne laisser dans le haut du tube que le moins d'air qu'il est possible, n'est point aisée à concevoir : car la partie du tube qui est au dessus de l'eau étant occupée, avant l'inflammation, par l'air & par les grains de poudre, il doit s'y trouver, après l'inflammation, le fluide élastique produit par la poudre,

l'air qui y étoit auparavant, moins l'air abſorbé par la vapeur du ſoufre. De ſorte que le ſurplus de l'eſpace, dans le dernier cas, contiendra ce même fluide élaſtique; moins l'air abſorbé, & moins encore l'eſpace qu'occupoient les grains de poudre. Donc ce ſurplus, d'où dépend tout le ſuccès de l'expérience, ſera toujours le même, quelle que ſoit la quantité d'air qu'on aura laiſſée dans le tube. La conſidération du plus ou moins d'air eſt donc abſolument inutile dans cette expérience ; à moins qu'on ne diſe que la quantité d'air abſorbé eſt d'autant moindre, qu'on en aura laiſſé moins dans le tube : dans ce cas-là, on auroit raiſon d'en conſerver le moins qu'il eſt poſſible. Mais ne pourroit-on pas objecter, qu'au défaut de l'air, la vapeur ſulfureuſe pourroit bien attaquer le fluide élaſtique lui-même, & en abſorber une partie ? D'autant plus qu'il y a une grande analogie entre l'air & ce fluide ; le ſuccès de l'expérience ſeroit alors tout auſſi incertain, que ſi l'on eût laiſſé beaucoup d'air dans le tube. Quoi qu'il en ſoit, cette circonſtance ne pouvant rien ajouter à la preuve de la préſente Propoſition, il eſt inutile de s'y arrêter davantage. Au reſte, ſi l'on vouloit employer cette expérience pour déterminer la quantité de matiere élaſtique que la poudre a produite, l'air abſorbé n'y mettroit aucun empêchement : il ſuffiroit d'obſerver, dans l'inſtant même, le plus grand abaiſſement de l'eau dans le tube, parce qu'il y a toute apparence que l'effet de la vapeur ſulfureuſe ſur l'air n'eſt point inſtantané.

PROPOSITION II.

Contenant une explication plus détaillée des circonſtances qui accompagnent l'inflammation de la Poudre, dans les deux expériences de la Propoſition précédente.

QUAND on allume une ſuffiſante quantité de poudre ſous le récipient d'une machine pneumatique, après en avoir pompé l'air, le mercure deſcend tout-à-coup; il remonte enſuite, & après un petit nombre d'oſcillations, dont la premiere ſeule eſt très-ſenſible, il paroît s'arrêter à un point plus bas qu'il n'étoit avant l'inflammation de la poudre: c'eſt à cette hauteur que nous avons fait le plus d'attention dans notre expérience. Mais quoique le mercure paroiſſe en repos à cette élévation, il continue cependant de monter encore imperceptiblement, de maniere qu'on ne s'apperçoit de quelque différence qu'après un temps aſſez conſidérable. Il ſe fixe enfin à une hauteur moindre que celle où il étoit avant l'exploſion de la poudre.

On obſerve à peu près les mêmes circonſtances, quand on allume de la poudre dans un tube dont on n'a point tiré l'air, comme on l'a fait dans la ſeconde expérience.

On peut attribuer au fluide élaſtique dont nous avons parlé, tous les effets produits par la poudre enflammée dans l'une & l'autre expérience. La chûte ſubite du mercure dans l'inſtant de l'exploſion, eſt un effet de la force élaſtique

de ce fluide, confidérablement augmentée par la chaleur de la poudre enflammée. Mais dès que la flamme eft diffipée & ceffe d'échauffer le fluide, ce qui arrive en très-peu de temps, fa force élaftique fera néceffairement affoiblie, le mercure s'élevera auffi-tôt après fa chûte, & continuera de monter jufqu'à ce que la matiere élaftique ait acquis le même degré de chaleur que le récipient; il paroît alors être en repos. Cependant, fi le mercure s'éleve encore pendant quelque temps d'une maniere imperceptible; c'eft que le récipient ayant auffi été échauffé par l'inflammation de la poudre, cette chaleur conferve dans le fluide élaftique un petit degré de force, qu'il ne perd enfin que quand le récipient eft entiérement refroidi, ce qui fe fait par degrés infenfibles. Cela vient auffi en partie de l'air qui a été abforbé par la vapeur du foufre, d'où réfulte une moindre preffion fur le mercure.

Scholie.

Nous démontrerons dans les Propofitions fuivantes, que la force de la poudre à canon n'eft autre chofe que la vertu expanfive de ce fluide élaftique produit par l'inflammation de la poudre dans les deux expériences précédentes. Nous ferons voir auffi que ce fluide exerce fon action en fuivant les mêmes loix que les autres fluides élaftiques, & particuliérement l'air. De maniere que, quelle que foit d'ailleurs la force de ce fluide, l'effet fera le même fi on lui fubftitue de l'air en égale quantité, renfermé dans le même efpace, & échauffé au même degré que l'eft cette matiere fluide par l'inflammation de la poudre. M. Hales a même obfervé que les

fluides élaſtiques produits par toute ſorte de procédés chymiques, ont même peſanteur que l'air, ce qu'il a particuliérement remarqué dans celui qui ſort du tartre. Il a trouvé auſſi que ces fluides ſe raréfient par la chaleur, qu'ils ſe condenſent par le froid, & que, pour les comprimer & les renfermer dans un moindre eſpace, il faut la même force que pour l'air; qu'en outre ſi l'on purifie ces matieres fluides de toute vapeur ſulfureuſe, en les faiſant paſſer à travers l'eau, elles ſe conſervent des mois & même des années entieres, ſans rien perdre de leur élaſticité. D'après ces obſervations, M. Hales ne doute point que toutes les matieres élaſtiques ainſi produites ne ſoient effectivement de l'air naturel. Si cela eſt ainſi, on doit à plus forte raiſon avoir la même opinion de celle qui ſe développe par l'inflammation de la poudre, attendu qu'elle ne vient que du ſalpêtre, n'y en ayant point ni dans le ſoufre, ni dans le charbon. Or, on ſait que le ſalpêtre n'eſt autre choſe que le mélange d'une terre ſaline avec l'air; car la même terre, lorſqu'elle eſt expoſée à l'air d'une maniere convenable, produit continuellement de nouveau ſalpêtre. Au reſte, il eſt indifférent pour notre objet, que le fluide élaſtique produit par l'inflammation de la poudre, ſoit de l'air naturel, ou qu'il n'en ſoit pas: il ſuffit que ce fluide exiſte dans la poudre, & qu'il ſoit capable d'en produire tous les effets. Que ce ſoit de l'air, ou non, nos conſéquences n'en ſeront pas moins juſtes, puiſqu'elles ne ſont fondées que ſur des propriétés que l'expérience, indépendamment de toute hypotheſe, a fait découvrir dans cette matiere élaſtique.

REMARQUE.

REMARQUE.

On peut donc se représenter la poudre comme une matiere qui renferme entre ses particules un air extrêmement condensé, & dont la constitution est telle, que l'inflammation rompt subitement les obstacles qui retiennent cet air, & lui donne la liberté de s'étendre dans un plus grand espace. En considérant ainsi la poudre, il sera facile d'en déduire les effets qui ont été observés dans les deux expériences rapportées ci-dessus : car, dès que l'air renfermé & comprimé dans la poudre se trouve débarrassé des liens qui le retiennent, sa force expansive étant considérablement augmentée par la chaleur de la flamme, il doit faire descendre le mercure dans la premiere expérience, & l'eau dans la seconde, beaucoup plus bas qu'il ne l'eût fait par son élasticité naturelle; & comme cette grande chaleur ne dure qu'un instant, le degré d'élasticité qu'elle avoit produite dans l'air, diminuera bientôt, & permettra au mercure & à l'eau de remonter aussi-tôt après leur premiere chûte. Mais puisque ces liqueurs continuent de monter encore très-lentement pendant quelque temps, & que cela ne peut venir que de l'air qui a été absorbé par les vapeurs sulfureuses, & du refroidissement insensible du récipient; il s'ensuit que ce n'est aussi que très-lentement que l'air s'incorpore dans la vapeur du soufre, & que cet accident ne sauroit nuire au succès de l'expérience, comme on l'a déjà fait observer dans la premiere Proposition. S'il est donc vrai que non-seulement on obtient les mêmes effets, en supposant dans la poudre un air

extrêmement condensé, mais encore que le fluide élaſtique qui eſt réellement produit par l'inflammation de la poudre, poſſede toutes les autres propriétés de l'air; on eſt fondé à conclure que ce fluide eſt en effet de l'air : attendu qu'on ſait par expérience que l'air n'eſt autre choſe qu'un compoſé des particules élaſtiques qui s'échappent des corps terreſtres par l'évaporation, & que tout fluide qui a même peſanteur & même élaſticité que l'air, peut, ſans erreur, être pris pour de l'air. On peut d'après cela ſe former une idée des diverſes ſortes de changemens que l'air eſt dans le cas de ſubir : tandis que la fermentation fait ſortir de certains corps, ainſi que l'inflammation le fait à l'égard de la poudre, une grande quantité d'air qui y étoit renfermé & fortement comprimé, & qui va ſe joindre enſuite à celui de l'athmoſphere; d'un autre côté, il y a des corps dans les pores deſquels l'air s'inſinue continuellement, il s'y accumule, s'y comprime & s'y maintient juſqu'à ce qu'il ſurvienne une cauſe qui le dégage. C'eſt ainſi que l'on peut concevoir que ſe forme petit à petit le ſalpêtre & pluſieurs autres ſubſtances, qui renferment dans leurs pores une grande quantité d'air comprimé.



PROPOSITION III.

La force élaſtique ou expanſive du fluide produit par l'inflammation de la Poudre, eſt, toutes choſes égales d'ailleurs, proportionnelle à ſa denſité.

LA preuve eſt que, quand on allume deux fois autant de poudre ſous le même récipient, le mercure parcourt auſſi un eſpace double en deſcendant dans le tube. Et comme une quantité double de poudre doit produire une quantité double de fluide élaſtique, il faut néceſſairement que, ſous un récipient purgé d'air, la denſité ſoit auſſi double. Donc, puiſque c'eſt la chûte du mercure qui meſure la force élaſtique de ce fluide, il eſt évident qu'une denſité double eſt la cauſe d'une élaſticité double. Cela ſe prouve encore par l'inflammation d'une même quantité de poudre ſous des récipiens de différentes capacités : le mercure s'abaiſſe d'autant plus, que le récipient eſt plus petit ; mais le fluide élaſtique produit par la poudre eſt auſſi d'autant plus denſe, que le récipient a une moindre capacité ; donc ſon élaſticité eſt encore, dans ce cas, proportionnelle à ſa denſité.

Comme on ne peut employer qu'une très-petite quantité de poudre dans ces ſortes d'expériences, & qu'il n'eſt guere poſſible d'en déduire exactement le rapport qu'il y a entre la denſité & la force élaſtique qui en dépend ; je me ſuis ſervi d'un grand récipient, dont la capacité étoit d'environ 520 pouces cubiques, après

avoir fait le vuide, j'y laissai tomber sur un fer rouge, une dragme de poudre ou un seizieme d'once *avoir du poids;* la poudre s'alluma & le mercure baissa précisément de deux pouces. Ayant ensuite répété cette expérience avec 2 dragmes de poudre, le mercure descendit de 3 $\frac{3}{4}$ pouces. Mais plusieurs grains étant tombés à côté du fer, ne prirent point feu à cause de l'humidité de la platine; ce qui a sans doute empêché que le mercure ne descendit dans ce dernier cas deux fois autant que dans le premier. La poudre, tombée à côté du fer, m'ayant paru suffisante pour faire baisser le mercure d'un quart de pouce, il est à présumer que, si tout eût pris feu, le mercure seroit descendu précisément de quatre pouces. D'où il suit encore que l'élasticité du fluide produit par la poudre est proportionnelle à sa densité.

REMARQUE.

Les expériences qu'on vient de rapporter, prouvent assez bien que la matiere fluide, qui se développe par l'inflammation de la poudre, est deux, trois ou quatre fois plus élastique, lorsqu'elle est renfermée dans un espace deux, trois ou quatre fois plus petit. Car quoique ces expériences soient trop délicates pour qu'il ne s'y glisse point quelqu'erreur difficile à appercevoir, ce qui rendroit cette proposition encore douteuse; néanmoins comme d'autres expériences en ont fait voir la vérité à l'égard de l'air, avec lequel le fluide de la poudre a une très-grande analogie; il n'y a point de raison pour douter que ce fluide ne soit assujetti à la même

regle. Ceci ne doit toutefois s'entendre, que lorſque la différence des degrés de compreſſion, dont on veut connoître les élaſticités correſpondantes, n'eſt pas trop conſidérable. Car quand même on pourroit s'aſſurer que l'air réduit à un volume dix fois moindre en deviendroit dix fois plus élaſtique; il ne s'enſuivroit pas pour cela que, dans le cas d'une plus forte compreſſion, la force élaſtique dût augmenter dans le même rapport; & il eſt très-poſſible que l'air devenant, par exemple, cent fois plus denſe, ſon élaſticité devienne plus ou moins de cent fois plus grande. Ceci n'infirme point la conjecture de M. Bernoulli, qui penſe, comme nous l'avons déjà dit, qu'un air mille fois plus denſe, devient par-là peut-être dix mille fois plus élaſtique. Or comme l'air renfermé dans la poudre, y eſt pluſieurs centaines de fois plus denſe que dans ſon état naturel; il eſt très-douteux que ſon élaſticité y ſoit préciſément le même nombre de fois plus grande que celle de l'air naturel. L'on ne peut donc pas dire que la propoſition de l'Auteur ſoit vraie généralement & ſans reſtriction: elle ne peut l'être qu'en diſant que l'élaſticité de l'air eſt proportionnelle à ſa denſité lorſque la différence des denſités n'eſt pas trop grande.



PROPOSITION IV.

Déterminer exactement la force élastique, & la quantité de la matiere fluide qui se développe par l'explosion d'une quantité donnée de Poudre.

COMME différentes especes de poudre doivent produire, suivant leur qualité, différentes quantités de ce fluide élastique ; on ne peut rien déterminer si l'on ne s'assure d'abord de l'espece de poudre que l'on veut employer dans ses recherches. En conséquence j'ai choisi celle qui se fait pour l'usage du gouvernement : la proportion des matieres qui la composent étant toujours la même, & fixée par un réglement, elle est plus propre aux expériences que celles dont la composition dépend du caprice des Fabricans.

Après avoir fixé le choix de la poudre que l'on veut soumettre à l'expérience, il faudra encore se rappeller les deux principes suivans, dont nous avons déjà parlé à la fin de la seconde Proposition. 1°. Que cette matiere subtile devient plus élastique par la chaleur, & moins élastique par le froid, en suivant les mêmes loix que l'air. 2°. Que la densité de ce fluide, & par conséquent sa pesanteur, est égale à celle d'une pareille quantité d'air, qui auroit le même degré d'élasticité & de chaleur.

Il résulte de l'expérience rapportée dans la Proposition précédente, qu'une dragme de poudre, ou $\frac{1}{16}$ d'once *avoir du poids*, ou 27, 38 grains

de la livre *troy*, abaisse de 2 pouces le mercure qui se soutenoit auparavant à la hauteur d'environ 30 pouces. Si l'on employoit donc 15 fois autant de poudre; c'est-à-dire, 410,7 grains de la livre *troy*, le mercure descendroit tout-à-fait; la matiere subtile renfermée dans le récipient seroit alors en équilibre avec la pression de l'athmosphere; & son élasticité seroit par conséquent égale à celle de l'air que nous respirons. La capacité du récipient de notre expérience étoit de 520 pouces cubiques; dont 410,7 grains de poudre produisent par l'inflammation 520 pouces cubiques d'une matiere subtile ayant le même degré d'élasticité que l'air naturel. Donc une once entiere *avoir du poids* produiroit 554,67 pouces cubiques du même fluide.

Pour juger maintenant de la densité de cette matiere subtile, il est à remarquer qu'une partie de l'élasticité qu'on vient de trouver, a été occasionnée par la chaleur du fer rouge placé sous le récipient. Et comme la chaleur du récipient a été sensiblement moindre que celle de l'eau bouillante, par laquelle on fait que la force du ressort de l'air augmente d'environ un tiers; j'en ai conclu, ainsi que d'autres circonstances, que le surcroît d'élasticité occasionné par cette cause pouvoit être évalué à un cinquieme; de maniere que si la chaleur du récipient eût été égale à celle de l'air extérieur, le mercure ne seroit descendu que de 1 pouce $\frac{3}{5}$, au lieu de 2 pouces. Il faut donc diminuer le nombre trouvé de 554,67 pouces cubiques de sa cinquieme partie, ce qui donnera encore 443,72 pouces cubiques, pour la quantité du fluide produit par l'explosion d'une once de poudre, & ayant la même élasticité

& la même densité que l'air commun. Mais 443, 74 pouces cubiques d'air pesent 131, 73 grains de la livre *troy*, & comme l'once *avoir du poids* dont je me suis servi, équivaut à 438, 084 grains de la livre *troy*, il s'ensuit que le fluide contenu dans l'espece de poudre que j'ai employée fait les $\frac{131,73}{438,084}$ ou, à peu de chose près, les $\frac{3}{10}$ du poids total de la poudre.

Pour connoitre la quantité de ce fluide relativement au volume de la poudre, on remarquera que 17 $\frac{3}{5}$ dragmes de la livre *avoir du poids*, ou 1 once 1, 6 dragme occupent un volume de 2 pouces cubiques; or, en suivant le calcul ci-dessus, on trouvera que cette quantité, ou 2 pouces cubiques de poudre, contient 488 pouces cubiques d'une matiere subtile semblable à l'air : il y a donc dans un pouce cubique de poudre, une quantité de cette matiere subtile qui, étant raréfiée jusqu'à ce qu'elle ait même densité que l'air, occupera un espace de 244 pouces cubiques.

Pour confirmer davantage cette évaluation, j'ai allumé, à plusieurs reprises, une dragme de poudre, par le moyen d'un verre ardent, dans un récipient purgé d'air, dont la capacité étoit de 470 pouces cubiques. Ces expériences exigeoient plus de soins & d'attentions que celles où j'employois le fer rouge : comme il falloit plus de temps à la poudre pour s'enflammer, l'air pouvoit rentrer dans le récipient, contribuer à la descente du mercure & rendre les résultats de l'expérience incertains. D'ailleurs, environ le quart de la poudre étant dispersé dans le récipient par l'explosion des premiers grains, ne prenoit point feu. Pour ôter toute incertitude,

je ramaſſois la poudre qui n'avoit point été allumée, je la peſois exactement & j'augmentois l'abaiſſement du mercure d'une quantité proportionnelle; ce qui donne un abaiſſement de 2, 1 pouces dans la 1re. expérience ; de 1, 8 dans la 2e. 2, 1 dans la 3e. & de 1, 85 dans la 4e. La moyenne fait voir que l'abaiſſement du mercure occaſionné par l'inflammation d'une dragme de poudre, dans un récipient de 470 pouces cubiques, devoit être de 1, 76 pouces. D'où il ſuit que, dans un récipient de 520 pouces cubiques, une dragme de poudre auroit dû faire deſcendre le mercure de 1, 77. Ce qu'il faut retrancher de cet abaiſſement, à cauſe de la chaleur du récipient, eſt très-peu de choſe : car un petit thermometre placé ſous le récipient, n'y a marqué que la température ordinaire de l'été, par laquelle l'air eſt raréfié d'un douzieme ; diminuant donc 1, 77 de ſa douzieme partie, on aura 1, 62 pouces; ce qui differe très-peu de 1, 6 ou 1 $\frac{3}{5}$ pouces qu'on a trouvés ci-deſſus. Il eſt donc démontré que le fluide élaſtique contenu dans une quantité quelconque de poudre, lorſqu'il eſt raréfié au point d'avoir une denſité égale à celle de l'air naturel, occupe un eſpace 244 fois auſſi grand que le volume de la poudre dans laquelle il étoit renfermé.

Ce réſultat s'accorde aſſez bien avec celui de l'expérience que Hauksbee rapporte dans ſa Phyſique expérimentale, page 81. Il a trouvé qu'un grain de poudre produiſoit un pouce cubique d'un fluide élaſtique & analogue à l'air. Quant au rapport qu'il y a entre le volume de la poudre & l'eſpace qu'occupe ce fluide, lorſ-

qu'il eſt devenu auſſi denſe que l'air, le même Auteur trouve que c'eſt celui de 1 à 232. Ce rapport s'écarte ſi peu de celui que j'ai trouvé, qu'à peine peut-on attribuer la différence aux différentes qualités de poudre qu'on a employées. On peut encore conclure de là, que l'air extérieur n'empêche point le développement de cette matiere ſubtile, puiſqu'une même quantité de poudre en produit autant dans l'air que dans le vuide.

Donc ſi le fluide produit par l'exploſion de la poudre, ne pouvoit s'étendre que dans l'eſpace même qu'occupoit la quantité de poudre qui le renfermoit; il ſeroit 244 fois plus denſe, & par conſéquent auſſi 244 fois plus élaſtique que l'air ordinaire; ſans compter que ſa force élaſtique eſt conſidérablement augmentée par la chaleur de l'inflammation.

Il eſt donc inconteſtable qu'une quantité de poudre enflammée dans une capacité qu'elle remplit exactement, doit exercer, contre les parois qui la renferment, une force plus grande que 244 fois celle qui réſulte de la preſſion de l'athmoſphere, à cauſe de la grande chaleur qui accompagne l'inflammation de la poudre. Nous allons voir dans la Propoſition ſuivante, quelle eſt l'augmentation de l'élaſticité que cette chaleur eſt capable de produire.

Remarque.

Il peut d'abord naître un doute ici au ſujet du poids dont l'Auteur s'eſt ſervi dans ſes expériences: il fait mention des deux ſortes de poids uſités en Angleterre, de la livre *troy* & de la

livre *avoir du poids*. On fe fert de la premiere pour pefer l'or, l'argent & d'autres matieres précieufes; elle fe divife ordinairement en 12 onces, dont chacune eft à l'once de Paris, comme 480 eft à 472 $\frac{1}{2}$; de maniere que l'once de la livre *troy* répond à 585 $\frac{1}{7}$ grains de Paris. La livre *avoir du poids* fert pour les marchandifes communes; elle fe partage en 16 onces; chaque once, felon Eifenfchmidt, dans fon Traité *de Ponderibus & Menfuris veterum*, en 8 dragmes & 24 fcrupules; cette once répond à 534 grains de Paris. Néanmoins M. Robins nomme dragme dans les expériences précédentes, la feizieme partie d'une once; c'eft-à-dire, la moitié de la dragme d'Eifenfchmidt. Mais l'Auteur montre trop d'exactitude dans toutes les autres circonftances, pour que nous puiffions le taxer d'erreur dans celle-ci. Les dénominations & les fous-divifions des poids & des mefures font arbitraires, & celles qui font ufitées en Angleterre, pouvant nous être inconnues; il n'y a point d'inconvénient à entendre des demi-dragmes, ce que notre Auteur dit des dragmes. D'ailleurs, fi le réfultat des expériences eft tel qu'on l'a rapporté, ce que nous ne révoquons point en doute, il n'importe de quel poids ou de quelle mefure on fe foit fervi. Car fi l'on fe repréfente une capacité d'un pied cubique entiérement remplie de cette efpece de poudre, que notre Auteur nomme poudre de gouvernement, il s'y trouvera de cette matiere fubtile, dont on a parlé, une quantité fuffifante, pour occuper un efpace de 244 pieds cubiques, lorfque fa denfité fera la même que celle de l'air naturel. Et comme le poids de cette matiere fait les $\frac{3}{10}$ du

Digitized by Google

poids de la poudre dans laquelle elle eſt renfermée ; il s'enſuit que dans 10 livres de poudre, il y a 3 livres de cette matiere comprimée (*).

Il eſt auſſi à remarquer que le fluide renfermé dans la poudre, y étant 244 fois plus denſe que l'air naturel, n'en eſt pas pour cela 244 fois plus élaſtique : nous avons déjà fait obſerver que l'élaſticité ne ſuit le rapport de la denſité, que dans le cas où celle-ci n'eſt pas trop grande. De ſorte que la denſité de l'air augmentant ſelon le rapport de 1 à 244, il pourroit très-bien ſe faire que ſa force expanſive augmentât dans un rapport plus grand que celui de 1 à 300 ; ce doute ne peut être levé que par de nouvelles expériences. Au ſurplus, la denſité de l'air étant ſujette à de fréquentes variations, on auroit pu obſerver l'état de l'athmoſphere & en tirer compte pour chaque expérience. Mais cette négligence nous paroît très-excuſable, vu l'impoſſibilité de parvenir à une connoiſſance aſſez parfaite de la force de la poudre, pour qu'il ſoit néceſſaire d'avoir égard à de pareilles circonſtances.

(*) Selon M. Tillet, (Mém. de l'Acad.) la livre *troy* ſe diviſe en 12 onces, l'once en 20 deniers, le denier en 24 grains. Cette livre vaut 12 onces 1 gros 37 grains, ou 7021 grains de Paris.

La livre *avoir du poids* ſe diviſe en 16 onces, l'once en 20 deniers, le denier en 24 grains. Cette livre vaut 14 onces 6 gros 42 grains, ou 8538 grains de Paris.

Ainſi, l'once de la livre *troy* repond à 585 $\frac{1}{12}$ grains de Paris ; & l'once de la livre *avoir du poids* à 533 $\frac{5}{8}$, ce qui approche beaucoup de l'évaluation d'Eiſenſchmidt.

PROPOSITION V.

Déterminer de combien l'élasticité de l'air est augmentée par le degré de chaleur du fer le plus ardent.

Pour trouver cette augmentation, j'ai pris un morceau de canon de mousquet, long d'environ six pouces ; je fis boucher exactement l'un des bouts & alonger l'autre en forme de cône tronqué, terminé par une ouverture d'environ un 8me. de pouce de diametre. Ayant ensuite fait rougir ce canon au feu, je plongeai le côté de l'ouverture dans un vase plein d'eau, & je l'y laissai jusqu'à ce que le canon fût entiérement refroidi. Après quoi l'ayant retiré avec beaucoup de précaution, je pesai l'eau qui y étoit entrée pendant le refroidissement, le plus exactement qu'il me fut possible. Cette expérience faite à trois différentes reprises, je trouvai que l'eau entrée dans le canon pesoit 610, 594 & 600 grains ; & comme ce canon pouvoit contenir 769 grains d'eau, il s'ensuit que l'air qui y étoit resté, tenoit la place de 186, 201 & 196 grains d'eau ; & c'étoit là sans doute tout l'air que contenoit le canon pendant qu'il étoit rouge. Ainsi l'élasticité de l'air, quand il a un degré de chaleur égal à celui d'un fer rouge, est à celle qu'il a dans son état naturel, comme toute la capacité du canon de notre expérience, est à la partie qu'y occupoit l'air refroidi ; c'est-à-dire, comme 796 est à 186, 201 & 196 ; ou

bien, en prenant un milieu, comme 796 eſt à 194 $\frac{1}{3}$, ou enfin à peu près comme 4 à 1.

La chaleur, qu'on a donnée au fer dans ces trois expériences, eſt celle que les Forgeurs nomment *chaleur à blanc*. Au reſte, il faut bien prendre garde qu'il n'entre point de vapeur aqueuſe dans le canon pendant qu'il ſe refroidit; une partie de l'air en ſeroit chaſſée, & l'expérience ſeroit manquée. Pour prévenir cet accident, avant de retirer le canon du feu, j'en bouchai l'ouverture avec un fil de fer qui s'y ajuſtoit exactement, & que j'y laiſſai juſqu'à ce que tout fût refroidi; enſuite laiſſant toujours le côté de l'ouverture plongé dans l'eau, je retirai le fil de fer, afin que l'eau entrât librement dans le canon & y occupât la place de l'air qui en avoit été chaſſé par la chaleur.

REMARQUE.

Puiſque l'air qui rempliſſoit le canon pendant qu'il étoit rouge, n'en occupoit que le quart après le refroidiſſement, il eſt évident que, quand on donne à l'air contenu dans un eſpace bien fermé un degré de chaleur égale à celle du fer rouge, ſon élaſticité devient quadruple de ce qu'elle étoit auparavant, & qu'ainſi cet air échauffé ne pourra être en équilibre avec l'air extérieur, que lorſqu'il ſera étendu dans un eſpace quadruple. Mais quoique cela arrive à l'égard de l'air naturel, il y a toujours lieu de douter que l'élaſticité d'un air beaucoup plus denſe, tel qu'eſt l'air renfermé dans les grains de poudre, augmente dans la même proportion, lorſqu'il ſera animé du même degré

de chaleur. S'il est donc encore incertain qu'un air beaucoup plus dense que l'air naturel, mais au même degré de chaleur que celui-ci, ait une élasticité proportionnelle à sa densité; il paroîtra bien plus incertain encore, qu'un air aussi dense devienne précisément quatre fois plus élastique lorsqu'il aura la chaleur du fer rouge, parce qu'une pareille augmentation a lieu pour l'air naturel. Il sera donc nécessaire d'avoir égard à ces circonstances dans des recherches ultérieures, afin de ne point admettre pour évidens & démontrés, des principes qui paroissent encore très-incertains.



PROPOSITION VI.

Déterminer de combien l'élaſticité du fluide, qui ſe développe par l'exploſion de la Poudre, eſt augmentée par la chaleur qui accompagne l'inflammation.

PUISQU'IL y a une ſi grande analogie entre ce fluide & l'air, que le chaud & le froid influent également ſur leur élaſticité & leur denſité; ſi nous ſuppoſons que la chaleur occaſionnée par l'inflammation de la poudre eſt égale à celle d'un fer rouge, il s'enſuivra que l'élaſticité de ce fluide eſt beaucoup plus grande au moment de l'exploſion, que lorſqu'il eſt au même degré de chaleur que l'air extérieur, & cela dans le rapport de 796 à 194 $\frac{1}{3}$, ou à peu près de 4 à 1; c'eſt-à-dire qu'à l'inſtant de l'inflammation, l'élaſticité de ce fluide devient quatre fois plus grande par la chaleur, qu'elle ne le ſeroit à raiſon de ſa ſeule denſité.

Pour ſe convaincre que la chaleur occaſionnée par l'inflammation d'une quantité ſuffiſante de poudre n'eſt pas moindre que celle du fer rouge, il n'y a qu'à conſidérer la flamme & la nature des matieres qui entrent dans la compoſition de la poudre. Car l'activité du feu de la poudre n'eſt point inférieure à celle du feu ordinaire, or on ſait que tout feu eſt capable de chauffer le fer juſqu'au rouge; donc tout feu, & par conſéquent celui de la poudre, a auſſi ce même degré de chaleur.

Si

Si l'on admet donc que la chaleur occasionnée par l'inflammation de la poudre, n'est pas moindre que celle d'un fer rouge, & qu'elle augmente l'élasticité du fluide renfermé dans la poudre, suivant le rapport de $194\frac{1}{3}$ à 796, comme on l'a trouvé dans la Proposition précédente; il s'ensuit que ce fluide, dans l'état de compression où il se trouve dans la poudre, étant 244 fois plus dense que l'air naturel, son élasticité augmentera encore dans le rapport de $194\frac{1}{3}$ à 796, & sera par conséquent 999,4 fois plus grande que celle de l'air commun. Cette augmentation paroît suffisamment démontrée par tout ce qui a été dit jusqu'à présent.

On est donc en état d'évaluer la véritable force de la poudre dans le premier instant de l'inflammation : car le fluide qui s'échappe de la poudre, ayant alors une force élastique 999,4 ou, en nombre entier, 1000 fois plus grande que celle de l'air commun, qui est équivalente à la pression de l'athmosphere; il s'ensuit que la force de la poudre, dans le premier instant de l'inflammation, est 1000 fois plus grande que la pression de l'athmosphere; donc sa pression sur une surface d'un pouce quarré est équivalente à celle d'un poids de plus de 12 milliers. Mais cette force ne conserve pas long-temps la même activité, elle diminue aussi-tôt après l'inflammation, à mesure que le fluide s'étend dans un plus grand espace, & qu'il perd de sa chaleur, comme on l'a fait voir dans les Propositions précédentes.

Scholie.

Nous avons supposé que la chaleur de la

poudre, lorſqu'elle eſt enflammée en ſuffiſante quantité, a la même intenſité que celle du fer rouge le plus ardent & prêt à blanchir, ſuppoſition que nous verrons ci-après vérifiée par pluſieurs expériences; mais il n'en eſt pas moins vrai que cette chaleur peut varier, & qu'elle varie en effet, ſelon la quantité plus ou moins grande des matieres combuſtibles. Et il eſt probable que, ſelon la quantité de poudre qui prend feu en même temps, la flamme peut avoir tous les degrés de chaleur, depuis celle du fer qui commence à rougir, juſqu'à celle qui eſt néceſſaire pour la vitrification des métaux. Mais comme la quantité de poudre employée ordinairement dans les opérations militaires, n'eſt jamais aſſez conſidérable pour produire ce dernier effet; on verra par les expériences ſuivantes qu'on ne s'écarte pas beaucoup de la vérité, en attribuant à celle qu'on allume pour les uſages ordinaires, à peu près la même chaleur que celle du fer rouge; en obſervant toutefois que cette chaleur augmente ou diminue, ſelon que la quantité de poudre eſt plus ou moins grande.

Remarque.

Tout le monde ne conviendra peut-être pas qu'il ſe trouve dans la flamme un degré de chaleur auſſi conſidérable que dans un fer rouge, attendu que l'expérience nous apprend qu'on peut ſans riſque paſſer la main à travers la flamme, & qu'il n'eſt guere poſſible de toucher un fer embraſé ſans ſe brûler. On remarquera à ce ſujet que de deux corps de différente denſité, & qui ſont également échauffés, c'eſt tou-

jours au plus dense que nos sens attribuent le plus de chaleur ; il en est de même pour le froid. Car personne n'ignore que l'eau & le fer exposés long-temps au froid pendant l'hiver, paroissent beaucoup plus froids que l'air, quoique le thermometre indique le même degré de température dans ces corps. La raison de ce phénomene est fort simple : lorsque nous touchons un corps sensiblement plus chaud ou plus froid que la main, la sensation que nous éprouvons est d'autant plus forte, que nous touchons à la fois un plus grand nombre des parties de ce corps, chacune de ces parties agissant sur nous: or un corps plus dense présente plus de parties dans le même espace ; la sensation qu'il excite doit donc être plus forte ; le fer doit donc paroître plus froid que l'air & l'eau, quoique tous ces corps aient la même température. De là vient aussi qu'un fer rouge nous paroît plus chaud que la flamme. Si l'on considere ensuite que c'est de la flamme que le fer tient toute sa chaleur, on conviendra que le même degré de chaleur se trouve dans la flamme, & que ce n'est qu'à raison d'une moindre densité qu'elle y paroît moins active. La chaleur de la flamme se communique aux autres corps successivement & en plus ou moins de temps, selon leur densité : il ne faut donc qu'un instant pour la transmettre au fluide élastique de la poudre, donc la flamme a la plus grande intensité de chaleur, puisque, malgré son peu de durée, qui n'est que d'un instant, elle échauffe toute la masse d'une piece d'artillerie au point, qu'après quelques coups tirés de suite, on est obligé de la rafraîchir.

Au reſte l'évaluation que l'on fait ici de la force de la poudre, eſt fondée ſur deux principes dont la certitude n'eſt pas encore bien prouvée, comme nous l'avons déjà remarqué. Le premier eſt que l'air devenu 244 fois plus denſe, devient auſſi préciſément 244 fois plus élaſtique. Le ſecond de ces principes eſt qu'un air auſſi denſe qu'on vient de le dire, acquiert, par un degré de chaleur égal à celui d'un fer rouge, une élaſticité quatre fois plus grande, ainſi qu'il arrive à l'air dans ſon état naturel. Or on peut raiſonnablement douter de la vérité de ces principes; il eſt donc à propos de ne les admettre comme vrais, qu'autant que l'expérience, d'accord avec la théorie, aura diſſipé tous nos doutes; il ſuffira d'examiner ſi, en les employant à l'explication des effets de la poudre, ils nous conduiſent à des réſultats trop grands ou trop petits. Il eſt vrai que, ſelon M. Daniël Bernoulli, la force de la poudre, telle que notre Auteur la détermine, ſeroit beaucoup trop petite pour produire les effets que nous connoiſſons; mais la réſiſtance étant, d'après les recherches de M. Robins, beaucoup plus conſidérable que ne l'a ſuppoſée M. Bernoulli, il n'eſt pas impoſſible qu'au moyen de cette compenſation, les deux principes énoncés ci-deſſus ſe trouvent conformes à la vérité. C'eſt ce que nous examinerons plus particuliérement dans les remarques ſuivantes (5).

---

(5) L'eſtimation que l'Auteur fait de la force de la poudre évaluée à 1000 fois la preſſion de l'athmoſphere, nous paroît beaucoup trop foible. L'erreur ne vient point d'un défaut d'exactitude dans les procédés de ſes expériences, contre

lesquelles nous ne voyons d'autre objection à faire, que la très-petite quantité de poudre qu'on est obligé d'y employer, n'étant pas possible d'en déduire une connoissance exacte de la force de la poudre. Nous croyons donc qu'on ne sera pas fâché de trouver ici une théorie plus lumineuse, fondée sur la nature même des substances qui entrent dans la composition de la poudre.

Tous les Physiciens conviennent que les effets de la poudre à canon doivent être attribués à la force expansive d'un fluide élastique produit par l'inflammation; mais ils ne s'accordent point sur la nature de ce fluide, ni sur sa maniere d'agir. Les uns n'y voient qu'un mouvement rapide des parties de la poudre mises en action par le feu, & communiqué par le choc à l'obstacle qu'on lui oppose. D'autres regardent l'air comme la seule cause des effets de la poudre : c'est l'air renfermé dans ses grains & dans leurs interstices, dont le ressort se débande par l'action du feu, & qui tend à occuper un espace beaucoup plus considérable. Il en est d'autres qui, sans exclure le concours de l'air, pensent que le ressort qui produit les effets de la poudre, est celui des vapeurs des diverses substances qui la composent : cette opinion est fondée sur ce que le salpêtre, le soufre & le charbon contiennent une grande quantité de particules aqueuses, spiritueuses & oléagineuses, qu'on en retire par la distillation sous une forme fluide; & comme ces particules, réduites en vapeurs par l'action du feu, sont, ainsi que la vapeur de l'eau, susceptibles d'une dilatation considérable, & d'une grande élasticité : on peut avec raison leur attribuer la force de la poudre enflammée.

Enfin, si nous consultons les Chymistes sur la nature d'un fait qui a pris naissance dans leurs Laboratoires, ils nous diront que l'explosion de la poudre n'est autre chose que la détonnation du nitre mêlé avec les matieres inflammables, qui entrent dans la composition de la poudre. Nous renvoyons le Lecteur au Dictionnaire de Chymie, pour la théorie de ce phénomene; elle y est développée d'une maniere très-satisfaisante, aux mots *Détonnation* & *Poudre à canon.* Nous en tirerons seulement les conséquences suivantes. « L'explosion qui accompagne la déton-» nation du nitre, & qui est d'autant plus violente, que » les matieres sont plus exactement mêlées & plus for-

» tement resserrées, est due, en général, à une grande » & subite dilatation de quelques corps très-expansibles. » La plupart des Physiciens l'ont attribuée à l'air contenu » dans le nitre & dans les matieres avec lesquelles il dé- » tonne, parce qu'effectivement l'air enfermé & raréfié » subitement, est capable de produire, & produit réel- » lement, dans beaucoup d'expériences, des explosions » très-violentes ; mais aucune de ces explosions de l'air » n'est comparable, pour la force, à celle de la poudre » à canon, qui est l'effet de l'inflammation du soufre ni- » treux. Ces considérations nous portent à adopter le sen- » timent de Sthaal sur ce phénomene : or, ce Chymiste » pense qu'on doit attribuer ces explosions, non à l'air, » mais à l'eau du nitre, ou plutôt à son acide, laquelle » est effectivement capable d'occasionner des explosions » infiniment plus violentes que celle de l'air, lorsqu'un » très-grand degré de chaleur, tel que celui de l'incan- » descence, lui est appliqué subitement, comme cela lui » arrive dans la détonnation du nitre. Le même Chymiste » va plus loin : il avance, non sans beaucoup de vrai- » semblance, que l'eau, dont l'aggrégation est tout-à-fait » rompue, acquiert les propriétés de l'air. On peut ex- » pliquer très-bien, dans cette supposition, pourquoi le » nitre est capable de brûler & de faire brûler avec lui » les corps combustibles, sans le concours de l'air, & dans » les vaisseaux clos; c'est qu'il contient dans sa propre sub- » stance une matiere qui s'en dégage à mesure qu'il » brûle, & qui, si elle n'est pas de l'air, a la propriété » d'entretenir la combustion tout aussi bien que lui, & » peut-être encore beaucoup mieux. La flamme du nitre, » qu'on fait détonner plus lentement pour pouvoir l'ob- » server, semble démontrer aux yeux ce qu'on vient » d'avancer à ce sujet ; car elle a toute l'apparence de » celle d'un corps dont la combustion est vivement pous- » sée par un souffle très-violent, qui part de son propre » sein. »

La flamme qui se manifeste dans la détonnation du nitre avec les matieres combustibles qui entrent avec lui dans la composition de la poudre, est elle-même une preuve de l'existence de l'eau ou principe aqueux dans ces matieres : car, selon le sentiment de Pott, autre Chymiste célebre, « l'eau est la cause premiere de la flamme. Il

» eſt vrai que l'eau eſt entiérement incapable par elle-
» même de devenir feu ; mais quand elle eſt pénétrée
» intimement par le phlogiſtique, & que le phlogiſtique
» devient feu par un mouvement convenable, alors l'eau
» qui ſe trouve mêlée avec ce principe, eſt raréfiée par
» la chaleur, & réduite en une vapeur ou un ſouffle,
» qui excite le feu tranquille & brûlant en lui-même,
» & qui s'éleve en flamme. Les bois, les huiles, les
» graiſſes, ne donnent de la flamme que par l'eau qu'ils
» contiennent. »

La Chymie, dont nous venons d'employer les principes pour expliquer le phénomene de l'exploſion de la poudre, nous fournira auſſi le moyen d'en évaluer la force. Des trois ſubſtances qui entrent dans la compoſition de la poudre, le ſalpêtre eſt la principale cauſe de ſon exploſion, & qui en conſtitue la force. Le nitre ou ſalpêtre eſt un ſel neutre formé par la combinaiſon de l'acide nitreux & d'un alkali fixe, par parties à peu près égales : l'acide nitreux differe des autres acides, en ce qu'il eſt toujours ſous une forme fluide; expoſé à l'air, & même ſans le concours de l'air, il exhale continuellement une vapeur très-élaſtique. Le nitre eſt très-fuſible ; une chaleur modérée ſuffit pour le mettre en fuſion, & dans cet état, il peut s'échauffer juſqu'à rougir ſans s'enflammer; mais il a cette propriété ſinguliere, qu'il s'allume, s'enflamme & ſe décompoſe en un inſtant, lorſqu'il y a un contact immédiat avec des matieres combuſtibles & actuellement enflammées. C'eſt ſur cette propriété qu'eſt fondée la compoſition de la poudre. Le ſoufre & le charbon ſont très-propres à produire cet effet. La moindre étincelle ſuffit pour les allumer; & du mélange intime de ces deux matieres avec le ſalpêtre, s'enſuit la décompoſition de cette derniere ſubſtance, & l'exploſion de la poudre. Une autre propriété du nitre, qu'il nous importe eſſentiellement de connoître, c'eſt que, ſelon M. Baumé, toutes les fois qu'on décompoſe ce ſel dans des vaiſſeaux clos, & par des moyens propres à enflammer & à détruire ſon acide, on ne trouve conſtamment, après la déflagration, que la moitié du poids du nitre qu'on a employé. Ceci nous fait voir que l'acide nitreux, réduit en vapeurs, eſt la ſeule cauſe des effets de la poudre; il en eſt la cauſe efficiente, au lieu que le ſoufre & le

charbon n'en sont que des causes occasionnelles. C'est le nitre seul qui détonne à l'aide des deux autres substances, lorsqu'elles sont enflammées. S'il est vrai que le soufre produit de violentes explosions quand il est réduit en vapeurs, & qu'on vient à les enflammer, il ne l'est pas moins que le soufre allumé ne produit qu'une flamme lente & tranquille, quoique très-ardente, & capable d'enflammer les corps combustibles. Il suffit que le soufre, ainsi allumé, ait un contact immédiat avec le nitre, pour le faire détonner, & pour détruire son acide, en le réduisant en vapeurs. Si la vapeur du soufre fournit son contingent dans l'explosion, ce ne peut être que pour très-peu de chose; on peut même dire pour rien, puisque de la poudre sans soufre n'en est pas pour cela plus foible. Ce n'est donc que sur la vapeur de l'acide nitreux que nous devons fixer notre attention, pour parvenir à évaluer la force de la poudre.

La poudre à canon est un mélange intime & exact de 75 parties de nitre, $9 \frac{1}{2}$ parties de soufre, & $15 \frac{1}{2}$ parties de charbon. L'expérience a fait voir que ces proportions du soufre & du charbon, quoiqu'elles ne soient peut-être pas généralement adoptées, sont les meilleures, c'est-à-dire, les plus propres à faire détonner tout le nitre. Le nitre forme donc les $\frac{3}{4}$ d'une certaine quantité de poudre; par conséquent l'acide nitreux en est les $\frac{3}{8}$; d'où il est aisé de conclure le volume que cet acide occupe dans le volume de la poudre. La pesanteur spécifique de l'eau étant exprimée par 1, celle de la poudre est 0,9457, & celle de l'acide nitreux 1,583; de sorte que la pesanteur spécifique de l'acide nitreux est à celle de la poudre, comme 1 est à 0,5974; d'où il suit que le volume que l'acide nitreux occupe dans la poudre, est au volume de la poudre, comme 0,224 est à 1, ou qu'il en est un peu moins que le quart.

Voyons maintenant quelle est la force expansive de cet acide réduit en vapeurs par l'inflammation. Il résulte des expériences de M. Amontons, que l'air échauffé au degré de *chaleur* de l'eau bouillante, devient environ *trois* fois plus élastique, qu'il ne l'est dans son état naturel. On sait d'ailleurs qu'à la même chaleur de l'eau bouillante, l'eau est réduite en une vapeur qui se raréfie 14000 fois son volume; cette vapeur est donc environ 4700

fois plus expanſible, que l'air que nous reſpirons. Or, ſi c'eſt à raiſon d'une plus grande denſité que les corps produiſent des vapeurs plus expanſibles, on pourra dire que, puiſque l'eau, pour être 850 fois plus denſe que l'air, produit une vapeur 4700 fois plus élaſtique, il faudra que l'acide nitreux, parce qu'il eſt 1,583 fois plus denſe que l'eau, produiſe une vapeur ou un fluide 8,753 fois plus élaſtique que la vapeur de l'eau, ou 41139 fois plus élaſtique que l'air dans ſon état naturel. Tel ſeroit donc le rapport de la force de la poudre à la force élaſtique de l'air, ſi le volume de l'acide nitreux qui entre dans la compoſition d'une certaine quantité de poudre, étoit égal au volume de la poudre; mais nous venons de voir qu'il n'en eſt qu'un peu moins que le quart, & qu'ainſi la vapeur produite par cet acide, ſe répand dans un eſpace plus que quadruple de ſon premier volume, avant d'exercer aucun effort contre les parois de la capacité qui renferme la poudre, ou contre les autres obſtacles qui lui ſont immédiatement appliqués. La force élaſtique de cette vapeur ainſi raréfiée, n'eſt donc plus alors qu'un peu moins que le quart de ce qu'elle étoit ſous ſon premier volume, c'eſt-à-dire, qu'elle eſt 41139 × 0,224, ou 9215 fois plus élaſtique que l'air dans ſon état naturel.

Cette évaluation, quoiqu'elle donne à la poudre une force preſque décuple de celle que Robins a trouvée, eſt peut-être encore trop foible : car il peut très-bien ſe faire qu'à un degré de chaleur plus grand que celui de l'eau bouillante, tel qu'eſt celui qui accompagne l'inflammation de la poudre, il y ait une différence beaucoup plus conſidérable que nous n'avons dit, entre l'élaſticité des ſubſtances que nous venons de comparer, l'air, l'eau & l'acide nitreux. Cela paroît très-vraiſemblable; mais les moyens d'apprécier exactement ces ſortes de rapports, nous ſont encore inconnus. Nous avons ſuppoſé, d'un autre côté, que c'eſt à raiſon d'une plus grande denſité, que les corps produiſent des vapeurs plus expanſibles. Ce principe, qu'on pourroit peut-être nous conteſter, ſemble néanmoins fondé ſur les loix que la nature obſerve dans la formation de tous les corps. En remontant aux premiers élémens des corps, ne peut-on pas dire qu'ils ſont tous compoſés de feu, d'air, d'eau & de terre, ou de quelques-uns de ces principes diverſement combinés,

& conclure de là que les corps ne sont plus ou moins denses, que parce que ces principes constitutifs y sont plus ou moins comprimés, & par conséquent plus ou moins expansibles? Quant à l'acide nitreux en particulier, sa prodigieuse expansibilité est suffisamment prouvée par les précautions qu'on est obligé de prendre, pour éviter la rupture des vaisseaux dans lesquels on les distille. Nous pouvons donc conclure avec raison, que la force attribuée à la poudre par notre Auteur est beaucoup trop foible : nous verrons par la suite pourquoi, malgré cette erreur, sa théorie donne des résultats conformes à la vérité.

Cet Ouvrage étoit déjà à l'impression, lorsque j'eus connoissance des expériences, sur les végétaux, de M. Ingen-Housz. Il y est dit en note, page 115, « la prodigieuse quantité d'air déphlogistiqué que le nitre donne » par une chaleur violente, ou par le contact du feu, » jointe à une quantité proportionnée d'air inflammable, » dégagé du charbon par la même cause, fait le fondement d'une nouvelle théorie, qu'il a donnée de l'ex» plosion redoutable de la poudre à canon. » Elle est insérée dans la partie II. du volume 69 des Transactions philos. année 1779.

L'Auteur y applique très-heureusement les découvertes faites depuis peu d'années, de plusieurs especes d'air, à la théorie de la poudre : il fait voir que l'air déphlogistiqué qui se dégage du salpêtre, & l'air inflammable qui se dégage du charbon dans l'inflammation de la poudre, produisent un fluide enflammé, dont le volume est à celui de la poudre, comme 2276 est à 1, & dont l'expansion est capable de produire tous les effets connus de l'explosion de la poudre. Cette théorie fait comprendre en même temps pourquoi la poudre n'a pas besoin d'être en contact avec l'air de l'athmosphere, pour s'enflammer, le nitre produisant lui-même un air propre à servir d'aliment à la flamme.

La théorie de M. Ingen-Housz, d'accord en partie avec celle que je viens d'établir, quoique fondée sur d'autres principes, prouve évidemment que l'estimation de M. Robins est beaucoup trop foible.

PROPOSITION VII.

Connoissant la longueur & le calibre d'une piece de canon, le poids du boulet, la charge de la poudre, & sa force élastique au premier instant de l'inflammation, déterminer la vîtesse avec laquelle le boulet est chassé hors du canon.

Pour résoudre ce problême, nous nous servirons des deux principes suivans.

1°. Que l'action de la poudre sur le boulet cesse au même instant qu'il est sorti de la piece.

2°. Que la charge de poudre est entiérement enflammée, & convertie en un fluide élastique avant que le boulet soit sensiblement ébranlé.

On trouvera la démonstration de ces deux principes dans la scholie qui est à la suite de cette Proposition. Les supposant donc démontrés, nous passons à la solution du problême.

Soit AB, fig. 1, l'axe d'un canon, A le fond de l'ame, B la bouche, CD le calibre ou diametre de l'ame, & DCGE l'espace qu'occupe la charge de poudre. Supposons de plus que le boulet touche la poudre en EG, la pression exercée contre la surface du boulet sera la même que contre un cercle dont le diametre est égal à celui du boulet. De sorte que la force avec laquelle le boulet est chassé suivant la direction FB, pourra se déduire aisément de son diametre. Maintenant soit menée la droite FH perpendiculaire sur l'axe AB, & AI pa-

rallele à FH ; & soit décrit par le point H l'hyperbole KHNQ entre les asymptotes AI & AB. Si l'on représente la force qui agit sur le boulet en F, par la ligne FH; l'ordonnée MN exprimera la force qui agit sur le boulet, lorsqu'il est parvenu en M, & qui le pousse suivant la direction MB. Car lorsque le fluide élastique de la poudre s'est dilaté jusqu'en M, son élasticité est à celle qu'il avoit étant renfermé dans l'espace AF, comme la ligne AF est à AM, ou, suivant la nature de l'hyperbole, comme MN est à FH. Ces lignes n'expriment à la vérité que le rapport des densités du fluide; mais nous avons démontré dans la seconde Proposition que l'élasticité de ce fluide est proportionnelle à sa densité. Donc si FH représente la force qui agit sur le boulet en F; MN représentera la force qui agit en M.

Maintenant, puisque la force qui agit en F, est supposée connue, ainsi que la pesanteur du boulet; on connoîtra le rapport qu'il y a entre la force qui agit contre le boulet à chaque point de la longueur du canon, & le poids du boulet. Prenant donc FL : FH comme la pesanteur du boulet est à la force qui agit en F, & menant LP parallele à AB, le rapport de chaque ordonnée MN à sa partie MR, sera aussi celui de la force de la poudre à chaque point M, au poids du boulet. Donc, *par la 39 Prop. liv. 1 des Principes math. de Newton*, l'espace hyperbolique FHQB exprime le quarré de la vîtesse avec laquelle le boulet est chassé hors du canon; & la surface rectiligne LPBF exprime le quarré de la vîtesse avec laquelle le même boulet seroit chassé hors de la piece, si la force qui le pousse étoit

conftante & égale à la pefanteur du boulet ; il eft donc aifé de connoître le rapport de ces vîteffes, puifque ces deux furfaces font connues. Mais la vîteffe que le boulet auroit en B, s'il étoit pouffé le long de la ligne FB par une force conftante & égale à fon poids, feroit égale à celle qu'il auroit acquife en tombant librement d'une hauteur égale à FB ; cette vîteffe étant connue, on trouvera l'autre par cette analogie : la vîteffe que le boulet auroit acquife en tombant d'une hauteur égale à la ligne FB, eft à la vîteffe avec laquelle il eft chaffé hors du canon, comme la racine quarrée de l'efpace rectiligne FLPB eft à la racine quarrée de l'efpace hyperbolique FHQB.

Pour donner un exemple de cette folution, fuppofons un canon de fufil dont la longueur AB foit de 45 pouces, le diametre de la balle de $\frac{3}{4}$ de pouce, & la longueur AF de l'efpace occupé par la poudre de $2\frac{1}{8}$ pouces. Par le moyen de ces quantités, nous allons déterminer la vîteffe avec laquelle une balle de plomb eft chaffée hors du fufil.

Il eft évident, par ce qui a été dit dans la Propofition précédente, que la force de la poudre, au moment de l'inflammation, eft mille fois plus grande que la preffion de l'athmofphere. Mais la preffion moyenne de l'athmofphere eft équivalente au poids d'une colonne d'eau de 33 pieds de hauteur, & comme la pefanteur fpécifique du plomb eft à celle de l'eau dans le rapport de 11,345 à 1 ; il s'enfuit que la preffion de l'athmofphere eft égale au poids d'un cylindre de plomb qui a 34,9 pouces de hauteur. Si l'on multiplie donc ce nombre

par 1000, on aura 34900 pouces pour la longueur d'un cylindre de plomb, qui produiroit une pression égale à celle que la poudre exerce sur la balle au moment de l'inflammation. Mais la balle ayant $\frac{3}{4}$ de pouce de diametre, est égale à un cylindre de même matiere & de même base, dont la hauteur seroit d'un $\frac{1}{2}$ pouce; donc la force de la poudre, dans l'instant de l'explosion, est 2 fois 34900 ou 69800 fois plus grande que le poids de la balle.

Cela posé, si l'on fait $FL = 1$, on aura $FH = 69800$. On a de plus $FB : FA :: 45 - 2\frac{5}{8} : 2\frac{5}{8} :: 339 : 21$; donc le rectangle FLPB est au rectangle AFHS, comme 339 à 21×69800, ou comme $1 : 4324$. Mais, comme dans l'hyperbole les espaces asymptotiques peuvent être exprimés par des logarithmes, on trouve que le rectangle AFHS est à l'espace asymptotique FHQB, comme la fraction décimale 0,43429, &c. est au logarithme de la fraction $\frac{AB}{AF} = \frac{360}{21}$; mais le logarithme de $\frac{360}{21}$ est 1,2340832; donc le rectangle FLPB est à l'aire hyperbolique, comme 0,43429, &c. est à $4324 \times 1,2340832$, c'est-à-dire, comme 1 est à 12287, dont les racines quarrées sont 1 & 110,8; & tel est le rapport entre la vîtesse que la balle acquerroit en tombant librement d'une hauteur égale à FB, ou de $42\frac{3}{8}$ pouces, & la vitesse avec laquelle elle sort du canon AB par l'impulsion de la poudre. Mais un corps acquiert, par sa chûte d'une hauteur de $42\frac{3}{8}$, une vîtesse capable de lui faire parcourir 15,07 pieds par seconde d'un mouvement uniforme; donc la balle, dont il est ici ques-

tion, reçoit, au moment qu'elle ſort du canon, une vîteſſe capable de lui faire parcourir 15,07 × 110,8 ou 1669 pieds par ſeconde d'un mouvement uniforme.

Ce calcul peut aiſément s'appliquer de la même maniere à tout autre cas : ſi, par exemple, la charge de poudre n'occupe point tout l'eſpace AF, enſorte qu'il y ait un intervalle entre la poudre & le mobile, que nous ſuppoſerons toujours en F ; alors il faudra diminuer FH, & par conſéquent l'aire FHQB, ſelon le rapport de la longueur AF à la longueur de l'eſpace que la poudre occupe. Si le calibre de la piece, ou le diametre du boulet, eſt plus grand ou plus petit, les longueurs AB, AF reſtant les mêmes ; la charge de poudre & la ſurface du boulet ſur laquelle elle agit, augmenteront ou diminueront ſuivant le rapport des quarrés de ces diametres. C'eſt pourquoi la ligne FH qui exprime le rapport de la force abſolue de la poudre au poids du boulet, doit varier réciproquement comme le diametre du boulet. Si c'eſt l'eſpace AF compris entre le boulet & le fond de l'ame qui augmente ou diminue, alors le rectangle AFHS & l'aire compriſe entre deux ordonnées qui ont le même rapport entre elles, augmenteront ou diminueront ſuivant la même proportion. De là il ſuit que l'aire FHQB qui repréſente le quarré de la vîteſſe communiquée au boulet, doit toujours augmenter ou diminuer directement comme le logarithme de la fraction $\frac{AB}{AF}$ (AB étant la longueur totale du canon, & AF la diſtance du boulet au fond de l'ame), directement encore comme la por-

tion de l'eſpace AF occupée par la charge de poudre, comme l'eſpace AF lui-même, & réciproquement comme le diametre du boulet. Puiſque nous avons déterminé la vîteſſe avec laquelle un boulet donné eſt chaſſé hors d'un canon donné, par une quantité de poudre donnée, qui occupe derriere le boulet un eſpace d'une longueur donnée; on pourra, par le moyen de ces rapports, déterminer dans tout autre cas la vîteſſe avec laquelle un boulet eſt chaſſé hors d'un canon. Il faut obſerver que, dans cet exemple, nous ſuppoſons le diametre de la balle de $\frac{3}{4}$ de pouce, ce qui donne un peu plus pour le calibre du canon; & que la quantité de poudre qui remplit l'eſpace DEGC, peſe exactement 12 dragmes, y compris la petite bourre d'étoupe.

Scholie.

Nous avons ſuppoſé dans cette ſolution, 1°. Que la poudre ceſſe d'agir ſur le boulet dès qu'il eſt hors du canon. 2°. Que la charge de poudre eſt entiérement enflammée, avant que le boulet ſoit ſenſiblement ébranlé. Il s'agit maintenant de faire voir la vérité de ces deux propoſitions.

La premiere paroîtra évidente, ſi l'on fait attention à la prodigieuſe rapidité avec laquelle la flamme, en vertu de ſon reſſort, ſe répand de tous côtés, auſſi-tôt qu'elle eſt hors du canon; ſa force ſe diviſe alors de maniere à ne plus faire d'impreſſion ſenſible ſur le boulet.

La ſeconde propoſition ne paroît pas d'abord de la même évidence, & elle a été révoquée en

en doute par plusieurs Auteurs qui ont écrit sur cette matiere. Elle n'est cependant pas moins vraie que la premiere. Pour s'en convaincre, il suffiroit de considérer l'état de compression où se trouve la flamme dans le premier instant de l'inflammation, & combien elle parcourt facilement les interstices que les grains de poudre laissent entr'eux : il seroit aisé d'en conclure que puisque les grains de poudre sont exposés à un feu aussi actif, il n'y en a pas un qui ne prenne feu dans le même instant. Mais pour ne point appuyer sur de simples conjectures un point aussi essentiel à notre théorie, nous aurons recours aux expériences que j'ai faites à ce sujet, & qui sont fondées sur le raisonnement suivant : si la poudre ne s'enflammoit point à la fois, mais successivement, un corps plus pesant, par exemple, deux ou trois boulets au lieu d'un, recevroit une plus forte impulsion de la même charge de poudre ; puisqu'il lui faudroit plus de temps pour faire parcourir à ce corps toute la longueur du canon, & que pendant ce plus long intervalle de temps, il s'enflammeroit une plus grande quantité de poudre. Or, l'expérience fait voir le contraire : car ayant tiré à différentes reprises une, deux & trois balles avec la même charge de poudre, j'ai toujours trouvé, par une méthode que je décrirai dans la suite, que les vîtesses étoient entre elles, à peu de chose près, réciproquement comme les racines quarrées de leurs poids : la même charge qui communiqua à une seule balle une vîtesse de 1700 pieds par seconde, imprima à deux balles une vitesse de 1250 à 1300 pieds par seconde, & à trois balles une vîtesse

de 1050 à 1100 pieds auſſi par ſeconde ; d'où il ſuit que la même charge de poudre exerce toujours la même force, quelque ſoit le nombre des balles, ou quelle que ſoit la peſanteur du corps qu'on lui oppoſe. Car tous les Mathématiciens conviennent de ce principe, que ſi deux corps de différentes maſſes ſont pouſſés par la même force le long du même eſpace, ils recevront des viteſſes réciproquement proportionnelles aux racines quarrées de leurs maſſes. Il eſt vrai que ſuivant ce principe les deux ou trois balles auroient dû recevoir une viteſſe de 1200 & de 980 pieds par ſeconde; mais je ne crois pas que cette différence vienne de la lenteur de l'inflammation ; c'eſt plutôt de ce que la flamme s'échappe en partie entre la premiere balle & les parois du canon, & agiſſant plus fortement ſur la ſeconde, lui communique cet excès de viteſſe.

Cette différence a même été inſenſible dans pluſieurs autres expériences, & les viteſſes ſe ſont trouvées aſſez exactement en raiſon inverſe de la racine quarrée du nombre des balles. Lorſque cette différence a été le plus ſenſible, elle n'a point paſſé la huitieme partie de la viteſſe entiere. Or elle devroit être bien plus grande, s'il étoit vrai, comme on le penſe communément, qu'une grande partie de la poudre ne prend feu que quand le boulet eſt hors de la piece, & qu'il y a même beaucoup de grains qui ne s'allument point du tout ; puiſque trois balles chargées enſemble s'arrêtant deux fois plus longtemps dans le canon qu'une ſeule, il devroit s'enflammer une bien plus grande quantité de poudre, & en réſulter par conſéquent une im-

pulsion beaucoup plus forte sur trois balles ensemble que sur une seule ; conséquence que nos expériences ont constamment démentie.

La vérité de ce principe sera encore mieux démontrée dans la suite, quand nous ferons voir que la regle qu'on en déduit donne toujours exactement la vitesse du mobile, quelle que soit la longueur du canon; ce qui n'arriveroit certainement pas, si la poudre ne s'enflammoit pas toute à la fois.

A l'égard des grains de poudre qui sont chassés hors du canon sans avoir pris feu, & que l'on regarde comme la preuve la plus convaincante que l'inflammation de la poudre est successive: cela vient, selon Diego Ufano, Auteur très-expérimenté dans ce qui concerne l'Artillerie, de ce que souvent toute la poudre n'est pas rassemblée avec assez de soin dans le fond de la piece, & qu'il en reste au devant du boulet une petite partie, qui est chassée hors du canon sans avoir pris feu: il est difficile d'éviter cet inconvénient dans les petites armes à feu, aussi bien que dans les grandes, sur-tout quand elles ont déjà servi plusieurs fois. Je ne dissimulerai cependant pas, qu'il se trouve souvent dans la meilleure poudre des grains assez mal façonnés, pour être chassés hors du canon sans avoir pris feu, quoiqu'entourés de la flamme, comme je l'ai souvent expérimenté moi-même. Quoi qu'il en soit, la vérité de notre principe n'en est pas moins incontestable.

Après avoir enseigné la maniere de calculer la vitesse que la force de la poudre imprime à un boulet, d'après les principes que nous venons d'établir; nous allons faire voir que les

résultats du calcul s'accordent parfaitement avec ceux de l'expérience, quels que soient le diametre du mobile, le calibre & la longueur du canon & la charge de poudre; & qu'ainsi tout ce qu'on a dit jusqu'ici de la force de la poudre & de ses effets, ne doit pas souffrir la moindre contradiction.

Mais pour pouvoir comparer la vîtesse réelle d'un boulet avec celle qui résulte de la théorie, il faudroit que l'on pût s'assurer par quelque moyen infaillible du degré de vîtesse qu'un mobile lancé d'une arme à feu reçoit effectivement de la poudre ; ce qui n'a pas encore été exécuté jusqu'à présent. Les moyens que l'on emploie communément consistent ou à observer le temps qu'un boulet met à parcourir une distance connue, ou à mesurer la portée du coup sous une inclinaison connue, & conclure la vîtesse du mobile par les principes ordinaires du mouvement parabolique. La premiere méthode est sujette à des difficultés insurmontables : en effet, le mouvement du boulet est si rapide, & par conséquent le temps observé si court, que le moindre défaut d'attention peut occasionner une erreur de 200 jusqu'à 600 pieds par seconde. La seconde est absolument fausse à cause de la résistance de l'air, à laquelle la premiere est aussi sujette, & qui est si considérable, que la vîtesse trouvée par ce moyen ne feroit quelquefois pas la dixieme partie de la vîtesse réelle.

Afin de prévenir toutes ces difficultés, j'ai imaginé une nouvelle méthode pour trouver, par l'expérience, la vîtesse réelle d'une balle à un tel degré de précision, qu'à peine pourra-

t-on se tromper d'un cinq centieme dans l'estimation d'une vîtesse de 1700 pieds par seconde. Je me sers pour cela d'une machine très-simple, dont je vais donner la description & l'usage dans la Proposition suivante.

PREMIERE REMARQUE.

L'auteur détermine ici la vîtesse avec laquelle un boulet est chassé d'une piece de canon, & il emploie à cet effet une méthode purement géométrique, en faveur, sans doute, de ceux à qui les nouveaux calculs ne sont pas familiers. Mais pour ceux de nos Lecteurs qui connoissent l'usage des formules algébriques, nous allons donner une solution analytique du même problême : cette méthode est plus simple, plus claire, & nous sera d'une grande utilité dans nos recherches ultérieures.

Soit donc, 1°. la longueur AB de l'ame du canon $= a$

2°. La longueur de l'espace AF $= b$; soit que la poudre remplisse entiérement cet espace, ou qu'elle n'en occupe qu'une partie.

3°. Le diametre du boulet $= c$.

4°. La pesanteur spécifique du boulet $= n$; celle de l'eau étant exprimée par 1.

5°. Soit enfin l'élasticité de la poudre dans l'espace AF, au premier instant de l'inflammation m fois plus grande que l'élasticité de l'air.

On aura donc $m = 1000$, selon notre Auteur; lorsque toute la capacité AF est remplie de poudre ; mais si elle n'en occupe qu'une partie, il faudra que la valeur de m soit diminuée proportionnellement.

Suppofons maintenant que le boulet foit arrivé en M, que $FM = x$, & que la viteffe du boulet au point M foit égale à celle qu'il auroit acquife en tombant librement d'une hauteur $= v$. Cette hauteur une fois connue, il fera facile d'en conclure la véritable viteffe du boulet : il n'y aura qu'à réduire la hauteur v en milliemes du pied de Rhin, en extraire la racine quarrée & la multiplier par 250 ; le produit fera le nombre de ces milliemes parties que la viteffe du boulet lui fera parcourir en une feconde.

Puifque la preffion de la poudre en M eft à fa preffion en F, comme AF eft à AM, c'eft-à dire, comme b eft à $b + x$; la preffion de la poudre en M fera à la preffion de l'athmofphere comme $\frac{mb}{b+x}$ eft à 1. Si l'on fuppofe donc que la preffion de l'athmofphere foit équivalente au poids d'une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur, la force qui pouffe le boulet au point M, fera égale au poids d'une colonne d'eau dont la hauteur feroit $\frac{32\,mb}{b+x}$ pieds. La denfité de la matiere du boulet étant à celle de l'eau comme n eft à 1, le poids du boulet eft égal au poids d'un cylindre d'eau de même diametre, & qui auroit $\frac{2}{3}\,nc$ pour hauteur. Donc la force qui agit fur le boulet en M eft au poids de ce boulet, comme $\frac{32\,mb}{b+x}$ eft à $\frac{2}{3}\,nc$, ou comme $\frac{48\,mb}{nc\,(b+x)}$ à 1. On aura donc, par les principes de Méchanique, l'équation $dv = \frac{48\,mb}{nc\,(b+x)}\,dx$, dont l'intégrale eft $v = \frac{48\,mb}{nc}\,l\,\frac{b+x}{b}$; où $l\,\frac{b+x}{b}$ repréfente le logarithme hyperbolique de la frac-

tion $\frac{b+x}{b}$. Or, les logarithmes hyperboliques se déduisent des logarithmes ordinaires des tables, en multipliant ceux-ci par 2,302585, ou en les divisant par 0,43429448. Maintenant, si l'on fait $x = FB$, & par conséquent $b + x = AB = a$, on trouvera la hauteur d'où un corps doit tomber pour acquérir la vîtesse avec laquelle le boulet est chassé hors du canon, savoir: $v = \frac{48\,mb}{nc}\, l\, \frac{a}{b}$ pieds. Si l'on veut se servir des logarithmes ordinaires, il faudra les multiplier par 2,302585; de maniere que si $l\, \frac{a}{b}$ représente le logarithme ordinaire de $\frac{a}{b}$, on aura $v = \frac{110,52408\,mb}{nc}\, l\, \frac{a}{b}$ pieds, lesquels étant réduits en milliemes, donnent $\frac{110524,08\,mb}{nc}\, l\, \frac{a}{b}$; le boulet aura donc une vîtesse par seconde exprimée par $250 \sqrt{\frac{110524,08}{nc}\, l\, \frac{a}{b}}$ milliemes de pieds, ou par $\frac{1}{4} \sqrt{\frac{110524,08}{nc}\, l\, \frac{a}{b}}$ pieds, ou enfin par $\sqrt{\frac{6907\frac{3}{4}\,mb}{nc}\, l\, \frac{a}{b}}$ pieds de Rhin.

Dans cette expression, la valeur de m est 1000, quand la charge remplit toute la capacité AF; mais si elle n'en occupe qu'une partie dont la longueur soit $= f$, alors on aura $m = \frac{1000\,f}{b}$, & la vîtesse du boulet sera de $\sqrt{\frac{6907750\,f}{nc}\, l\, \frac{a}{b}}$ pieds par seconde.

Ainsi le quarré de la vîtesse avec laquelle le boulet sort du canon est directement comme le logarithme de $\frac{a}{b}$ ou $\frac{AB}{AF}$, & comme la longueur f de l'espace qu'occupe la poudre, & récipro-

quement comme le diametre c du boulet & fa denfité n. L'Auteur s'eft donc trompé en mettant de plus la longueur $AF = b$ au nombre des quantités qui entrent dans l'expreffion de la vîteffe.

Voyons maintenant, en prenant l'exemple de l'Auteur, avec quelle vîteffe une balle de plomb eft chaffée hors d'un fufil :

On a $a = 45$ pouces,
$f = b = 2\frac{5}{8}$ pouces,
$c = \frac{3}{4}$ de pouce,
$n = 11,345$, parce que la balle eft de plomb :

Donc $\frac{a}{b} = \frac{120}{7}$; $l\,\frac{a}{b} = 1,2340832$; $\frac{f}{c} = \frac{7}{2}$ & $\frac{f}{nc} = \frac{7}{22,69}$; on aura donc $l\,\frac{f}{nc} = 9,4892635$. Si nous calculons notre formule par les logarithmes, nous aurons :

$l.\ 1,2340832 = 0,0913447$
$l.\ \frac{7}{22,69} \ldots = 9,4892635$
$l.\ 6907750\ . = 6,8393366$

$6,4199448$ dont la moitié eft $3,2099724$ qui eft le logarithme de $1621,7$: donc la vîteffe du boulet eft de $1621,7$ pieds rhénans par feconde. Ce nombre ne differe de celui que l'Auteur a trouvé, que parce que le pied de Londres, dont il s'eft fervi, eft moindre que le pied de Rhin ; & que je n'ai pris que 32 pieds pour la hauteur de la colonne d'eau égale au poids de l'athmofphere ; au lieu qu'il l'avoit fuppofée de 33 pieds.

SECONDE REMARQUE.

On a négligé dans cette ſolution pluſieurs circonſtances qui, quoique peu importantes chacune en particulier, peuvent néanmoins par leur concours diminuer la vîteſſe qu'on vient de trouver. On voit d'abord que la formule qui exprime cette vîteſſe, n'eſt point applicable à tous les cas; car il s'enſuivroit que le boulet recevroit une vîteſſe d'autant plus grande, que le canon ſeroit plus long, ce qui ne s'accorde point avec l'expérience, puiſqu'on ſait qu'une piece trop longue a moins de portée qu'une plus courte. Il eſt donc néceſſaire d'avoir égard à ces diverſes circonſtances, & de connoître leur influence ſur la vîteſſe du boulet.

Le poids ou la preſſion de l'athmoſphere eſt le premier obſtacle qui ſe préſente, & que l'on a négligé dans le calcul; car tant que le boulet ſe meut dans l'ame de la piece, il eſt continuellement repouſſé par l'air extérieur. La preſſion de l'athmoſphere eſt, comme nous avons déjà vu, égale au poids d'une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur; & comme le boulet peſe autant qu'une colonne d'eau dont la hauteur ſeroit $\frac{2}{3}\,nc$, la réſiſtance de l'athmoſphere au mouvement du boulet ſera au poids du boulet, comme 32 eſt à $\frac{2}{3}\,nc :: \frac{48}{nc} : 1$, ce qui donne cette équation : $dv = \left(\frac{48\,mb}{nc(b+x)} - \frac{48}{nc}\right) dx$, d'où l'on tire $v = \frac{48\,mb}{nc}\, l\, \frac{b+x}{b} - \frac{48\,x}{nc}$; & ſi l'on fait $x = \mathrm{FB} = a - b$, pour avoir la vîteſſe du boulet au moment qu'il ſort du canon, on aura $v = \frac{48\,mb}{nc}\, l\, \frac{a}{b} - \frac{48(a-b)}{nc}$ pieds.

En fecond lieu, la réfiftance de l'air, dont on a auffi fait abftraction, eft un autre obftacle au mouvement du boulet, mais dont l'influence dans le court efpace FB, doit fe réduire à bien peu de chofe. Néanmoins, pour y avoir égard, on remarquera que fi le boulet préfentoit en avant une furface plane, la réfiftance de l'air feroit égale au poids de la colonne d'air dont la hauteur $= v$, ou au poids d'une colonne d'eau dont la hauteur $= \frac{v}{864}$, en fuppofant que l'eau eft 864 fois plus pefante que l'air. Mais à caufe de la fphéricité du boulet, cette réfiftance n'eft que moitié auffi grande; elle eft, par conféquent, égale à une colonne d'eau d'une hauteur $= \frac{v}{1728}$. Elle eft donc au poids du boulet comme $\frac{v}{1728}$ eft à $\frac{2}{3} nc$, ou comme $\frac{v}{1152 nc}$ eft à 1. On a donc l'équation $dv = \frac{48 mbdx}{nc(b+x)} - \frac{48 dx}{nc} - \frac{vdx}{1152 nc}$, ou $dv + \frac{vdx}{1152 nc} = \frac{48 mbdx}{nc(b+x)} - \frac{48 dx}{nc}$.

Pour trouver l'intégrale de cette équation, on fuppofera e pour le nombre dont le logarithme hyperbolique eft 1, ou $e = 2,718281828$, & l'on multipliera cette équation différentielle par $e^{\frac{x}{1152 nc}}$; ou bien, en fuppofant $1152 nc = g$, par $e^{\frac{x}{g}}$ (6); on aura $e^{\frac{x}{g}}\left(dv + \frac{vdx}{g}\right)$

(6) Pour intégrer la différentielle $dv + \frac{vdx}{a}$, il faut la préparer de maniere qu'elle devienne la différentielle du produit des deux variables, laquelle, comme on fait, eft toujours égale à la fomme des produits de l'une des variables par la différentielle de l'autre; multiplions donc chaque terme de la différentielle propofée par c^{mx}, c étant une quantité conftante, & m une quantité à déterminer : on aura $c^{mx} dv + \frac{c^{mx} vdx}{a}$ qui fera la diffé-

$= \frac{48 mbe^{\frac{x}{g}} dx}{nc(b+x)} - \frac{48 c^{\frac{x}{g}} dx}{nc}$, dont l'intégrale eſt

$e^{\frac{x}{g}} v = \frac{48 mb}{nc} \int \frac{e^{\frac{x}{g}} dx}{b+x} - \frac{48 g}{nc} \left(e^{\frac{x}{g}} - 1 \right)$. ou

$v = \frac{48 mb}{nc} e^{-\frac{x}{g}} \int \frac{e^{\frac{x}{g}} dx}{b+x} - \frac{48 g}{nc} \left(1 - e^{-\frac{x}{g}} \right)$.

Maintenant, puiſque la fraction $\frac{x}{g}$ a une très-petite valeur, on aura, à peu près (7) $e^{\frac{x}{g}} = 1 + \frac{x}{g} + \frac{xx}{2gg}$ & $e^{-\frac{x}{g}} = 1 - \frac{x}{g} + \frac{xx}{2gg}$:

donc $\int \frac{e^{\frac{x}{g}} dx}{b+x} = \int \frac{dx}{b+x} + \int \frac{x dx}{g(b+x)} + \int \frac{xx dx}{2gg(b+x)} = l \frac{b+x}{b} + \frac{x}{g} - \frac{b}{g} l \frac{b+x}{b} + \frac{xx}{4gg}$

---

rentielle d'un produit, ſi l'intégrale du premier terme $c^{mx} dv$, en regardant x comme conſtante, eſt égale à l'intégrale du ſecond terme $\frac{c^{mx} v dx}{a}$, en regardant v comme conſtante. Or, dans ce cas, l'intégrale de $c^{mx} dv$ eſt $c^{mx} v$; & l'intégrale de $\frac{c^{mx} v dx}{a}$ eſt $\frac{c^{mx} v}{mlc}$. On doit donc avoir $c^{mx} v = \frac{c^{mx} v}{amlc}$, d'où l'on tire $m = \frac{1}{alc}$. La différentielle propoſée ſera donc intégrable, ſi on la multiplie par $c^{\frac{x}{alc}}$, & alors ſon intégrale ſera $c^{\frac{x}{alc}} v$. Mais il eſt clair que le calcul deviendroit plus ſimple, ſi, à la place de c, on prenoit le nombre qui a l'unité pour logarithme, on fera donc mieux, ce nombre étant e, de multiplier par $e^{\frac{x}{a}}$.

(7) C'eſt une propriété du nombre qui a l'unité pour logarithme hyperbolique, dont on trouve la démonſtration dans le Cours pour l'Artillerie, de M. Bézout, art. 90. tom. III. pag. 125.

Digitized by Google

$- \frac{bx}{2gg} + \frac{bb}{2gg} \, l \frac{b+x}{b}$; d'où l'on tire $v = \frac{48mb}{nc} \left[\left(1 - \frac{(b+x)}{g} + \frac{(b+x)^2}{2gg} \right) l \frac{b+x}{b} + \frac{x}{g} - \frac{bx}{2gg} - \frac{3xx}{2gg} \right] - \frac{48x}{nc} \left(1 - \frac{x}{2g} \right)$. Maintenant si, pour connoître la vîtesse du boulet au sortir du canon, on fait $x = a - b$, on aura $v = \frac{48mb}{nc} \left(1 - \frac{a}{g} + \frac{aa}{2gg} \right) l \frac{a}{b} + \frac{48mb(a-b)}{ncg} \left(1 - \frac{(3a-b)}{4g} \right) - \frac{48(a-b)}{nc} \left(1 - \frac{(a-b)}{2g} \right)$: & si l'on néglige les termes dont la valeur n'est point sensible, on aura $v = \frac{48mb}{nc} \left(1 - \frac{a}{g} \right) l \frac{a}{b} + \frac{48mb(a-b)}{ncg} - \frac{48(a-b)}{nc}$ pieds. De là, on pourra calculer la diminution de vîtesse occasionnée par la pression de l'athmosphere, & la résistance de l'air. Dans le même exemple, on a $a = 45$; $b = 2\frac{5}{8}$; $c = \frac{3}{4}$; $n = 11{,}345$; $nc = 8{,}509$; $m = 1000$; $g = 1152\, nc = 9802{,}37$; $48mb = 126000$ & $\frac{48mb}{nc} = 14808$. Le logarithme ordinaire de $\frac{a}{b}$ est 1,2340832, lequel étant multiplié par 2,302585, donne 2,8415816 pour le logarithme hyperbolique de $\frac{a}{b}$. On aura donc :

$\frac{48mb}{nc} \, l \frac{a}{b}$ . . . . . . = 42078,1

$\frac{48mb}{nc} \frac{a}{g} \, l \frac{a}{b}$ . . . . = 193,1

donc $\frac{48mb}{nc} \left(1 - \frac{a}{g} \right) l \frac{a}{b}$ = 41885

$\frac{48mb(a-b)}{ncg}$ . . . . . . = 0,035

$\frac{48(a-b)}{nc}$ . . . . = 239,04

ce qui donne . . . v = 41646 pieds.

Ce nombre réduit en milliemes donne 41646000,

donc la racine quarrée eſt 6453; prenant le quart on aura 1613 pieds pour la vîteſſe du boulet par ſeconde; mais nous avons trouvé plus haut une vîteſſe de 1621,7 pieds, il eſt donc clair que ces deux circonſtances ne font qu'un effet d'environ 8 pieds, & qu'elles ont pu être négligées par l'Auteur ſans qu'il en réſultât d'erreur ſenſible.

Troisieme Remarque.

Outre la preſſion & la réſiſtance de l'air, il y a deux autres cauſes qui tendent à diminuer la vîteſſe du boulet, quand même nous admettrions avec l'Auteur l'inſtantanéité de l'inflammation de la poudre : opinion qui ſouffre pluſieurs objections que nous rapporterons dans la ſuite. Ces deux cauſes paroiſſent avoir une trop grande influence ſur le mouvement du boulet, pour qu'on puiſſe ſe diſpenſer d'y avoir égard. La premiere eſt le frottement du boulet contre les parois intérieures du canon, par lequel ſon mouvement doit être retardé. On ne peut douter que ce frottement ne ſoit très-conſidérable dans les mouſquets & les carabines, où la balle eſt chaſſée de force; en le ſuppoſant égal au poids de la balle, il faudroit diminuer la hauteur trouvée v de la quantité $FB = a - b$, quantité trop petite en comparaiſon de la très-grande valeur de v pour que l'effet en ſoit ſenſible; & quand bien même le frottement vaudroit 100 fois le poids de la balle, la quantité $100\,(a-b)$ ſeroit encore aſſez petite pour pouvoir être négligée vis-à-vis de la hauteur v. Dans les canons, le frottement eſt beaucoup moins con-

ſidérable, à cauſe du vent du boulet, ſa force n'égale pas même la peſanteur du boulet. Quoiqu'il en ſoit, il eſt à préſumer que le frottement, ou toute autre cauſe ſemblable doit ſenſiblement altérer le mouvement du boulet dans l'ame du canon : car puiſqu'à l'exception du frottement le boulet rencontre hors de la piece tous les obſtacles qui s'oppoſent à ſon mouvement dans le canon ; une trop grande longueur de canon pourroit ne point nuire au mouvement du boulet, quoiqu'on ſoit bien ſûr du contraire, ſi le boulet ne rencontroit point au dedans du canon, une réſiſtance qui ne ſe trouve pas au dehors. Que cette réſiſtance provienne du frottement ou d'une autre cauſe, il faudroit qu'elle fût bien conſidérable pour contrebalancer dans un canon trop long, la force accélératrice de la poudre. On ne peut rien décider à ce ſujet avant qu'on ait fait des expériences propres à déterminer la longueur la plus avantageuſe des armes à feu. Il y a toute apparence que l'économie & la facilité des manœuvres ont plus de part à celle qu'on leur donne actuellement, que la conſidération des cauſes qui peuvent accélérer ou retarder le mouvement du boulet, & que ſi l'on ne fait pas les pieces plus longues, c'eſt que le ſurcroît de vîteſſe qui en réſulteroit, ne dédommageroit point des inconvéniens attachés à une plus grande longueur. Car ſuppoſons que le fuſil de l'exemple précédent ait 50 pouces de longueur au lieu de 45 ; on aura $\frac{a}{b} = \frac{50}{2,625}$ au lieu de $\frac{45}{2,625}$, ce qui donne $l\,\frac{a}{b} = 1,2798407$ à la place de $1,2340832$. On trouvera donc, abſtraction faite

des résistances, une augmentation de $\frac{17}{1000}$ pour le quarré de la vîtesse; & pour la vîtesse elle-même une augmentation de $\frac{18}{1000}$ ou $\frac{1}{55}$. Or, ce n'est pas la peine, pour une aussi petite différence, d'alonger un fusil de 5 pouces. Nous ne croyons donc pas nous écarter sensiblement de la vérité, si nous faisons abstraction du frottement du boulet contre les parois intérieures du canon.

La seconde cause dont nous voulons parler, a une bien plus grande influence sur le mouvement du boulet. Elle consiste en ce que, pendant que le boulet parcourt la longueur de l'ame du canon, le fluide élastique s'échappe non-seulement par la lumiere, mais encore par le vent du boulet, ce qui doit diminuer d'autant l'élasticité de celui qui reste dans le canon; & comme ce fluide, à cause de sa prodigieuse élasticité, s'élance par ces ouvertures avec beaucoup plus de vîtesse que le boulet n'en pourroit jamais recevoir; il en résulte une diminution très-sensible dans la force impulsive, & par conséquent dans le boulet une vîtesse moindre que ne l'a donnée le calcul précédent. Pour évaluer l'effet de cette diminution, il faudroit connoître la vîtesse avec laquelle l'air comprimé dans le canon s'élance par la lumiere & par le vent du boulet; c'est une recherche que nous aurons occasion de faire par la suite. En attendant, nous pouvons conclure d'un calcul fait à ce sujet par M. Daniël Bernoulli, dans son Hydrodynamique, pag. 241, qu'en faisant abstraction de cette diminution de force, il a fallu que ce savant Géometre supposât l'élasticité de l'air renfermé dans la poudre 6004 fois

plus grande que la pression de l'athmosphere ; au lieu qu'en y ayant égard, il a été obligé de l'admettre 10000 fois plus grande que la même pression. Quoique M. Robins n'ait point parlé des principes, qui servent à déterminer la vîtesse de cet air échappé ; il est certain qu'il en doit résulter un changement notable dans la détermination de la vîtesse du boulet. Si l'on voit donc dans la suite, que l'expérience s'accorde avec le calcul, ce sera une marque évidente, que l'on n'a pas supposé la force élastique de la poudre, au moment de l'inflammation, à beaucoup près aussi grande qu'elle l'est effectivement, & que cette force est par conséquent beaucoup plus que 1000 fois aussi grande que la pression de l'athmosphere.

QUATRIEME REMARQUE.

Ce ne sont point là les seules causes capables de diminuer la vîtesse trouvée par le calcul : nous pouvons en ajouter trois nouvelles aux quatre qu'on a déjà rapportées. Premiérement, lorsque le fluide élastique est actuellement dans un état d'expansion, toutes ses parties doivent se mouvoir en avant, & cela avec d'autant plus de vitesse, qu'elles sont plus éloignées du fond A de l'ame. Car les parties les plus avancées qui touchent le boulet, ont la même vîtesse que le boulet, & celles qui sont plus près du fond en ont une moindre. Et comme le mouvement des premieres s'accélere de plus en plus, il faut que la vitesse des autres augmente selon la même proportion. Mais chaque partie de ce fluide élastique est poussée en avant par l'air

l'air poſtérieur, & en arriere par l'air antérieur, il faut donc néceſſairement que la premiere preſſion ſoit plus forte que l'autre, puiſqu'autrement la viteſſe des parties antérieures n'augmenteroit pas. Il ſuit de là, que l'élaſticité du fluide derriere le boulet, n'eſt point uniforme dans tout l'eſpace qu'il occupe ; qu'elle eſt plus grande vers le fond de l'ame, que proche le boulet, & que par conſéquent le boulet eſt chaſſé par une force moindre qu'on ne l'a ſuppoſée dans le calcul, puiſqu'on a ſuppoſé que cette force élaſtique eſt uniformément répandue dans tout l'eſpace que le fluide de la poudre occupe derriere le boulet. Cette différence eſt d'autant plus grande, que ce fluide a une plus grande denſité ; mais comme cette denſité ne peut jamais être bien conſidérable, nous accorderons volontiers qu'il n'en doit pas réſulter une diminution ſenſible dans la viteſſe du boulet.

Par la même raiſon, la ſeconde cauſe, dont nous avons à parler, n'eſt pas plus efficace. On a ſuppoſé, dans la ſolution de notre problême, que toute la force de la poudre n'étoit employée qu'à chaſſer le boulet : mais comme toutes les parties de la poudre, & du fluide qu'elle produit, doivent elles-mêmes être miſes en mouvement, il faut néceſſairement qu'une petite partie de cette force y ſoit employée, & que celle qui agit ſur le boulet ſoit diminuée d'autant, ainſi que le mouvement du boulet. Ces deux cauſes partent de la même ſource; de l'inertie ou matérialité du fluide de la poudre ; & ſi la premiere peut être ſoumiſe au calcul, l'autre s'y trouvera auſſi compriſe. L'on ne peut cependant ſe former

une idée plus juste de leurs effets, qu'en les considérant sous les deux points de vue que nous venons de les présenter. Heureusement que ces effets ne sont pas bien sensibles, car il seroit difficile, & peut-être impossible, de les déterminer par les principes connus de méchanique; il faudroit pour cela employer des équations différentielles tellement compliquées, qu'on ne pourroit ni les résoudre, ni en tirer des conséquences satisfaisantes.

La troisieme cause est précisément ce second principe, que l'Auteur a admis comme vrai, & qu'il croit avoir pleinement démontré ; savoir, que toute la poudre s'enflamme dans un instant indivisible : il y a nombre d'objections à faire, & contre le principe, & contre les preuves que l'Auteur en donne. La premiere de ces preuves est fondée sur l'intensité de la chaleur de la flamme, & sur la prodigieuse vîtesse avec laquelle elle traverse toute la charge de poudre. Mais n'est-ce pas là précisément ce qui est en question? Et ne s'agit-il pas de savoir avant tout, si, dans le premier instant, il s'enflamme assez de poudre, pour que la flamme puisse aussi-tôt gagner tous les grains? D'ailleurs, puisque cette communication se fait par le mouvement, elle ne peut être que successive, & la question ne doit plus rouler que sur le plus ou le moins de temps que le feu met à se transmettre d'un bout de la charge à l'autre. Il est vrai que ce temps est très-court, & personne n'en disconvient ; mais il n'est pas moins vrai que le boulet parcourt le canon si rapidement, que la plus petite partie du temps peut fai... un objet considérable. Le boulet met ordi-

nairement un centieme de ſeconde à parcourir l'ame du canon, s'il en faut autant pour l'entiere inflammation de la poudre, le boulet ſera déjà parvenu à la bouche du canon, quand les derniers grains s'allumeront, & la force impulſive de la poudre ſera ſenſiblement diminuée. Si l'on veut, ſelon l'opinion de M. Robins, que l'inflammation totale ſe faſſe encore plus promptement; par exemple, en $\frac{1}{200}$, ou même en $\frac{1}{1000}$ de ſeconde, ce qui eſt à peine croyable, ſur-tout dans les grandes charges, il en réſulteroit toujours un effet ſenſible. Que la poudre s'enflamme auſſi facilement qu'on le voudra, encore faut-il du temps pour cela, & ce temps eſt plus ou moins long, ſelon les différentes qualités de la poudre. Auſſi, de l'aveu même de l'Auteur, a-t-on préféré la poudre grenée au pulverin, parce qu'elle s'enflamme plus promptement. Et comme il faut un temps très-ſenſible pour que le feu mis à un endroit d'une quantité de pulvérin, ſe communique à tout le reſte, le ſeul avantage de la poudre grenée conſiſte en ce que ſon inflammation s'acheve en moins de temps; mais ſi court que ce temps puiſſe être ſuppoſé, il ſuffira toujours pour produire un changement ſenſible dans la force impulſive. Nous avons dit plus haut que le boulet met $\frac{1}{100}$ de ſeconde à parcourir la longueur du canon; mais ce temps eſt encore trop long, ſuivant les expériences que M. Robins a faites, pour déterminer la vîteſſe réelle d'une balle. Il trouve que cette vîteſſe eſt de 1500 à 2000 pieds par ſeconde; & c'eſt dans le canon même du fuſil, dont la longueur étoit d'environ 3 $\frac{1}{4}$ pieds, que cette vîteſſe a été communiquée à

la balle. Si elle l'a eue toute entiere au premier inſtant de ſon mouvement, elle n'a dû reſter dans le canon que $\frac{3\frac{1}{2}}{1500}$ ou $\frac{3\frac{1}{2}}{2000}$, c'eſt-à-dire, en prenant un milieu, $\frac{1}{500}$ de ſeconde. Et ſi le mouvement de la balle dans le canon a été uniformément accéléré, ce temps aura été double, c'eſt-à-dire, de $\frac{1}{250}$ de ſeconde. Mais l'impulſion étant d'abord très-forte, & diminuant enſuite à meſure que la balle avance, il faut que le vrai temps ſoit plus court que $\frac{1}{250}''$ & plus long que $\frac{1}{500}''$, & par conſéquent d'environ $\frac{1}{375}$ de ſeconde. Or cet inſtant eſt ſi court, qu'il n'eſt pas poſſible de concevoir que l'entiere inflammation de la poudre puiſſe s'achever en moins de temps. On eſt donc d'autant moins fondé à négliger cette circonſtance.

Ce que l'Auteur dit enſuite, que les grains de poudre, qui ſortent ſouvent du canon ſans avoir pris feu, ont échappé au refouloir & n'ont point été raſſemblés derriere le boulet, ne prouve pas mieux en faveur de ſon opinion. Car ſuppoſé même que toute la poudre ait pris feu, avant que le boulet ſoit hors du canon, & que les grains que l'on trouve ſouvent intacts, n'aient point été derriere le boulet, il ne s'enſuit pas pour cela que le temps de l'entiere inflammation puiſſe être regardé comme nul, eu égard au temps que le boulet met à parcourir le canon. Ne peut-on pas dire auſſi qu'une bonne partie de la poudre ne s'enflamme qu'au dehors du canon, & que par conſéquent, quoiqu'enflammée, elle ne concourt point avec le reſte à l'impulſion du boulet? Ceci paroît d'au-

tant plus vraisemblable, que l'activité de la flamme hors du canon, eſt encore aſſez conſidérable, pour allumer des grains qui, pouſſés trop vivement dans le canon, n'auront pas eu le temps d'y prendre feu. D'ailleurs, l'Auteur convient lui-même, qu'il a trouvé dans la poudre des grains qui réſiſtent plus long-temps que les autres à l'action du feu. Or, puiſque ce temps a pu être obſervé, il a été ſenſible & ſûrement plus long que $\frac{1}{100}$ de ſeconde. S'il ſe trouve donc de tels grains dans la poudre, à plus forte raiſon doit-il y en avoir un plus grand nombre auquel il faut $\frac{1}{300}$ de ſeconde pour s'enflammer. D'où l'on voit que les preuves de l'Auteur ſont bien plus contraires que favorables à ſon opinion ſur la durée de l'inflammation de la poudre.

Ce que l'Auteur dit de plus fort pour juſtifier ſes principes, c'eſt la parfaite conformité qui ſe trouve entre l'expérience & les réſultats de ſon calcul. Mais nous avons déjà fait voir que, dans ce calcul, on n'a point conſidéré pluſieurs circonſtances, dont quelques-unes ne laiſſent pas de produire du changement; de ſorte que ce n'eſt pas ſans beaucoup d'adreſſe qu'on eſt parvenu à cet accord ſingulier du calcul avec l'expérience. En effet, puiſqu'on n'a pas fait attention à ce que la force impulſive perd par la lumiere & le vent du boulet, d'où réſulte pourtant déjà une différence entre la théorie & l'expérience; il eſt poſſible qu'en ſuppoſant l'inflammation de la poudre inſtantanée, on ait fait diſparoître cette différence: car la diminution de la force de la poudre ne vient pas de la ſeule raréfaction du fluide élaſtique, comme

on l'a ſuppoſé dans le calcul, la perte qui ſe fait par la lumiere & le vent du boulet y a auſſi beaucoup de part & la rend plus conſidérable qu'on ne l'a ſuppoſée dans la théorie. Maintenant ſi la poudre s'enflamme ſucceſſivement, la force accélératrice recevra des accroiſſemens continuels, ce qui pourra compenſer cette perte, de maniere qu'on trouvera encore, dans la diminution de la force impulſive, la même proportion qu'on a ſuppoſée dans la théorie. En s'y prenant ainſi, on pourroit toujours, ſans avoir égard aux circonſtances dont on vient de parler, faire accorder cette théorie avec l'expérience, en ſuppoſant une force d'autant plus grande à la poudre qui s'enflamme au premier inſtant. Car ſi une partie de la poudre, celle qui s'enflamme la premiere, a aſſez de force pour produire le même effet, que doit produire toute la charge ſuivant la théorie; il faudra que la force élaſtique de cette partie ſoit préciſément auſſi grande, que celle qu'on attribue à la charge entiere. Suppoſant donc la force élaſtique de l'air naturel exprimée par l'unité, il faudra que la force élaſtique du fluide, produit par l'inflammation de la poudre, ſoit autant de fois plus grande que 1000, que la partie enflammée dans le premier inſtant eſt moindre que la charge entiere. La théorie de l'Auteur ne peut donc s'accorder avec l'expérience que dans le cas où l'accroiſſement de la force accélératrice, réſultant de l'inflammation ſucceſſive, ſera compenſé par la diminution qu'occaſionne la perte qui ſe fait par la lumiere & le vent du boulet; compenſation qui peut s'être rencontrée dans l'eſpece de

poudre dont l'Auteur s'eſt ſervi. Mais cela même détruit le premier principe de l'Auteur, par lequel il attribue à la poudre une force 1000 fois plus grande que la preſſion de l'athmoſphere; l'accord avec l'expérience ſuppoſe cette force beaucoup plus conſidérable. Et s'il ne ſe fonde pareillement que ſur cet accord, pour établir l'inſtantanéité de l'inflammation de la poudre, ſon opinion, bien loin d'être confirmée par-là, ſe trouve au contraire totalement renverſée.

Mais pour ne point oppoſer de ſimples raiſonnemens aux expériences de l'Auteur, je vais auſſi en rapporter quelques-unes qui prouvent inconteſtablement, que l'entiere inflammation de la poudre ne s'acheve point dans un ſeul inſtant. Je citerai pour cela des épreuves faites à Péteſbourg en 1728 par le Général Gunther, & auxquelles j'aſſiſtai avec pluſieurs autres Académiciens : on ſe ſervit d'une piece de canon longue de 7 $\frac{7}{10}$ pieds anglois, & on la tira verticalement avec différentes charges. On obſerva à chaque coup, par le moyen d'un pendule, combien le boulet mettoit de temps à retomber à terre; de là M. Bernoulli calcula la vîteſſe avec laquelle le boulet avoit été chaſſé hors du canon. Il eſt vrai qu'il a employé pour cela la théorie Newtonniene ſur la réſiſtance de l'air; mais cette conſidération ne fait rien à notre objet actuel. Il trouve donc que le boulet chaſſé ſucceſſivement avec les charges de 1 once, de 4 onces & de 8 onces, feroit monté, dans un eſpace vuide d'air, à des hauteurs de 541, 13694, 58750 pieds. On raccourcit enſuite ce canon de 1 $\frac{7}{10}$ pieds, pour

le réduire à la longueur de 6 pieds; on le tira encore verticalement avec les mêmes charges, & l'on trouva que, dans le vuide, le boulet seroit monté à 274, 2404 & 6604 pieds de hauteur. D'où l'on voit que la charge de 8 onces a fait monter le boulet environ 9 fois plus haut avec le canon entier qu'avec le canon raccourci, & qu'ainsi la vîtesse dans le premier cas, a été à peu près trois fois aussi grande que dans le second. Néanmoins cette différence n'auroit presque pas dû être sensible, suivant la théorie de M. Robins. Il est donc clair, qu'avant d'avoir raccourci la piece, la plus grande partie de la poudre n'a dû s'enflammer que dans le temps que le boulet parcouroit la portion retranchée du canon. La même conséquence se tire aussi des deux petites charges, quoiqu'avec une moindre différence; d'où il suit encore que plus une charge de poudre est grande, plus il faut de temps pour son entiere inflammation : ce qui paroît assez évident de soi-même.

Les fusils carabinés qui, comme on sait, portent beaucoup plus loin que les autres, fournissent encore une preuve bien forte de l'inflammation successive de la poudre. Car si toute la poudre d'une charge s'allumoit à la fois, les carabines porteroient beaucoup moins loin que les fusils ordinaires. Que l'on réfléchisse seulement à la grande résistance qu'une balle rencontre dans un canon carabiné, sans compter le mouvement de rotation qu'elle y reçoit, & auquel une partie de la force impulsive est employée, il ne restera pas le moindre doute à cet égard. Malgré ces obstacles, la balle reçoit

beaucoup plus de vîteſſe dans une carabine que dans un fuſil ordinaire, toutes les autres circonſtances étant les mêmes. Il doit donc ſe trouver néceſſairement dans une carabine, une force beaucoup plus conſidérable que dans un fuſil ordinaire; qui puiſſe, non-ſeulement vaincre tous les obſtacles qui s'y rencontrent, mais de plus imprimer à la balle un mouvement plus rapide. Or, cette force provient uniquement de la poudre, & comme la charge eſt la même pour les deux eſpeces de fuſil; la cauſe de cette différence ne peut venir que de ce que, dans les carabines, toute la charge, ou au moins la plus grande partie, eſt enflammée avant que la balle ſoit ſortie; au lieu qu'il n'y en a qu'une très-petite partie dans les fuſils ordinaires. Ce dernier raiſonnement paroît donner encore plus de poids à la choſe, en démontrant non-ſeulement que la poudre ne s'enflamme pas toute à la fois, mais encore, qu'il ne s'en enflamme qu'une très-petite portion, avant le départ du mobile. Tout ceci donne auſſi plus de vraiſemblance à l'opinion de M. Bernoulli, que le fluide élaſtique produit par la poudre, a, au premier inſtant de l'inflammation, une force expanſive près de 10000 fois plus grande que le poids de l'athmoſphere, quoique notre Auteur ne l'admette que 1000 fois plus grande (8).

---

(8) Une autre remarque qui a échappé au Commentateur, c'eſt que, d'après l'Auteur lui-même, la force élaſtique du fluide, qui eſt le principal agent de la poudre, dépend, non-ſeulement de ſa denſité, mais auſſi de ſon degré de chaleur; car il dit poſitivement à la fin de la Propoſition VI. & cela paroît très-vraiſemblable, que cette force élaſtique diminue à meſure que le fluide s'é-

tend dans un plus grand espace, & qu'il perd de sa chaleur. Or, il perd de sa chaleur en même temps qu'il devient moins dense; ce n'est donc pas simplement en raison inverse des espaces, que la force du fluide élastique doit diminuer, mais en raison inverse des quarrés de ces mêmes espaces. Il résulte de là que, pour produire le même effet, il faut que la force élastique du fluide qui se développe par l'inflammation de la poudre, soit, même dans l'hypothese de l'inflammation instantanée, beaucoup plus que 1000 fois aussi grande que la pression de l'athmosphere; d'où l'on voit que le peu de force que l'Auteur attribue à la poudre, se trouve aussi en partie compensée par la maniere dont il la fait agir.

Pour trouver ce que doit être cette force, en conséquence du principe que je viens d'établir, reprenons la solution donnée par M. Euler, dans la premiere Remarque de cette proposition : m étant le rapport de l'élasticité du fluide renfermé dans l'espace $AF = b$, à l'élasticité de l'air; lorsque ce fluide sera étendu dans l'espace $AM = b + x$, sa pression sera à celle de l'athmosphere comme $\frac{mbb}{(b+x)^2} : 1$; donc la force du fluide étendu dans l'espace AM, est au poids de la balle comme $\frac{48\,mbb}{nc\,(b+x)^2} : 1$; d'où l'on tire $dv = \frac{48\,mbbdx}{nc\,(b+x)^2}$, &, en intégrant, $v = \frac{-48\,mbb}{nc\,(b+x)} + C$. Pour déterminer la constante C, on remarquera que, quand $x = 0$, on a $v = 0$, donc $0 = \frac{-48\,mb}{nc} + C$ & $C = \frac{48\,mb}{nc}$; donc $v = \frac{48\,mb}{nc} - \frac{48\,mbb}{nc\,(b+x)} = \frac{48\,mbx}{nc\,(b+x)}$; &, quand $b + x = a$, on a $v = \frac{48\,mb\,(a-b)}{nca}$, ce qui donne, en se servant du pied de Rhin, $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{48000\,mb\,(a-b)}{nca}} = \sqrt{\frac{3000\,mb\,(a-b)}{nca}}$ pour la vîtesse par seconde de la balle au sortir du canon. Or, pour que cette vitesse soit de 1621,7 pieds, comme M. Euler l'a trouvé, il faut que m soit à peu près $= 3000$; la force de la poudre, selon cette théorie, est donc déjà triple de celle que l'Auteur lui attribue; & il est aisé de voir que, pour produire le même

Digitized by Google

effet dans l'hypothese de l'inflammation successive, elle doit être encore plus considérable.

L'opinion de notre Auteur sur la promptitude de l'inflammation de la poudre, est si contraire aux loix les plus constantes de la nature, qu'il est étonnant, non pas précisément qu'il ait pu soupçonner qu'elle fût instantanée, mais qu'il se soit aveuglé au point d'avoir entrepris de le démontrer. Il y a toute apparence que, sur cet article, ainsi que sur l'évaluation de la force de la poudre, la vérité a eu moins de part à ses recherches, que la nécessité de faire quadrer les résultats de sa théorie avec ceux de la pratique. Il a fallu en conséquence supposer l'inflammation instantanée, & exprimer la force de la poudre par le nombre le plus propre à produire cet accord. Quoi qu'il en soit, pour peu qu'on réfléchisse sur ce qui se passe dans l'inflammation d'une certaine quantité de poudre, on n'aura point de peine à se convaincre qu'il est impossible qu'elle soit instantanée ; que le feu porté à l'une des extrémités, ne peut se communiquer à l'autre, sans passer par toutes les parties intermédiaires; qu'à ne considérer même qu'un seul grain de poudre, l'inflammation des différentes couches dont il est composé, ne peut être que successive de la surface extérieure au centre. Cette vérité n'a besoin que d'être présentée, pour en faire sentir toute l'évidence.

Il suit de là, que la force de la poudre est sujette à une infinité de variations; car puisque l'inflammation est successive, le fluide qu'elle produit ne se développe aussi que successivement. Celui qui s'élance des premiers grains enflammés, non-seulement contribue par son expansion à porter le feu avec plus de rapidité vers les autres grains, mais encore tend à les déplacer & à les pousser en avant, si aucun obstacle ne s'oppose à ce mouvement. Dans le cas d'un obstacle qui empêcheroit le déplacement des grains de poudre avant leur entiere inflammation, le fluide renfermé dans le plus petit espace possible, dans celui qu'occupoit la poudre, y acquerra le plus grand degré de force dont il soit susceptible, tant à cause de sa plus grande densité, que parce que l'inflammation sera alors accompagnée du plus haut degré de chaleur, causes principales de la force élastique du fluide produit par la poudre. Enfin, entre un obstacle dont la résistance seroit

aſſez grande pour s'oppoſer à l'expanſion de ce fluide, & un obſtacle qui céderoit à ſon premier effort, ou, pour mieux dire, à l'effort des premiers grains emflammés, on en peut concevoir une infinité d'autres, qui, par leurs différentes réſiſtances, donneroient lieu, avant qu'ils fuſſent déplacés, à l'inflammation d'une quantité de poudre plus ou moins grande, ou au développement d'une quantité plus ou moins grande du fluide produit par cette inflammation.

Outre ces cauſes de pluſieurs variétés que l'on apperçoit ſi fréquemment dans les effets de la poudre à canon, il en eſt d'autres qui proviennent des influences de l'athmoſphere : il y a peu de corps qui attirent l'humidité répandue dans l'air, & qui s'en débarraſſent auſſi facilement que la poudre : les deux extrêmes de ſéchereſſe & d'humidité lui ſon également nuiſibles ; trop ſeche, elle produit une moindre quantité de ce fluide qui conſtitue toute ſa force ; trop humide, l'inflammation eſt ralentie, & conſidérablement affoiblie. Si, pour ſécher la poudre, on l'expoſe à une trop grande chaleur, le charbon ſe détache de la ſuperficie des grains, les particules du ſoufre ſe mettent en fuſion, & ſe réuniſſent, les ingrédiens ne ſont plus exactement mélangés, & leur juſte proportion eſt altérée, ce qui rend la détonnation beaucoup moins violente. Il en eſt de même d'une poudre trop humide : c'eſt le ſalpêtre alors qui eſt attaqué ; il ſe diſſout, ſe cryſtalliſe, & devient par là moins propre à détonner avec les matieres inflammables.

On voit donc que, tant de la part de l'obſtacle qu'on oppoſe à l'expanſion du fluide dégagé de la poudre par l'inflammation, que du côté de la poudre elle-même, il y a une infinité de cauſes qui contribuent à faire varier ſa force, & que vouloir aſſigner à cette force une valeur conſtante, & la même pour tous les cas, c'eſt s'expoſer à être continuellement en contradiction avec l'expérience.



PROPOSITION VIII.

Trouver, par le moyen de l'expérience, avec quelle vîteſſe une balle ſe meut, à une diſtance quelconque du canon.

POUR faire cette expérience avec la plus grande préciſion, on ſe ſervira de l'inſtrument repréſenté par la figure 2. ABCD eſt une eſpece de chevre, aux deux jambes B & C de laquelle ſont fixément attachés deux bras R & S, capables de ſupporter le pendule EFGHIK, par le moyen de la traverſe EF. Ce pendule doit ſe mouvoir librement & faire ſes oſcillations ſur la traverſe EF priſe pour axe de mouvement. Le corps de ce pendule eſt de fer, ſa partie inférieure, ainſi que le préſente la fig. 3, eſt plus large que le reſte; elle eſt couverte d'un épais plateau de bois GHIK, fig. 2, qui y eſt fortement attaché au moyen de quelques vis. Au deſſous & tout près du pendule, eſt une autre traverſe OP attachée aux jambes B & C qui ſoutiennent le pendule; ſur le milieu de cette traverſe eſt fixé un inſtrument MNV compoſé, à peu près, comme une plume à deſſiner, de deux lames d'acier, que l'on peut ſéparer & rapprocher l'une de l'autre par le moyen d'une vis. Enfin au bas du pendule eſt attaché un ruban étroit LN qui paſſe entre ces deux lames & de là tombe librement, comme en W.

Cette machine ainſi conſtruite, on s'aſſurera

du poids du pendule, de la position de son centre de gravité & de son centre d'oscillation; afin de reconnoître la distance de ces deux points à l'axe de suspension EF. Au moyen de quoi l'on pourra déterminer le mouvement que le pendule reçoit par le choc d'une balle, qui le frappe en un point donné, la pesanteur & la vitesse de cette balle étant connues : c'est-à-dire, que si le pendule est en repos avant le choc, on pourra connoître l'étendue de la premiere vibration après le choc, ou de combien le pendule s'est écarté de la situation verticale. Et réciproquement si l'on connoît l'étendue de cette vibration, le poids de la balle & le point où elle a frappé le pendule, on pourra déterminer la vîtesse de la balle à l'instant du choc.

L'étendue de la premiere vibration se connoîtra facilement par le moyen du ruban LN: il n'y aura qu'à serrer les deux lames de l'instrument VN, de maniere que le ruban, gêné seulement par un léger frottement, puisse glisser entre deux. On tirera ensuite le ruban jusqu'à ce que sa partie entre le pendule & l'instrument VN soit bien tendue, de façon cependant à ne pas déranger le pendule de la situation verticale, & l'on fera une marque sur le ruban tout près de VN. Pour-lors on tirera une balle contre le pendule qui entraînera le ruban en reculant; la partie de ce ruban qui aura passé entre les deux lames, & qu'il est aisé de mesurer, indiquera la quantité du recul, ou la corde de l'arc décrit par le bas du pendule.

Pour faire mieux entendre les calculs par lesquels on détermine la vîtesse de la balle, en

connoiſſant la premiere vibration du pendule après le choc, nous allons en donner un exemple ſur le pendule qui a ſervi à nos expériences, il ſera facile d'en faire l'application à d'autres cas.

Le poids de mon pendule, fer & bois compris, étoit de 56 livres trois onces; la diſtance de ſon centre de gravité à l'axe EF étoit de 52 pouces, & comme il faiſoit 200 petites vibrations, en 253 ſecondes, ſon centre d'oſcillation étoit éloigné de cet axe de $62\frac{2}{3}$ pouces. De plus le centre du plateau GHIK étoit éloigné de 66 pouces du même axe.

Que l'on faſſe maintenant cette proportion: $66 \times 66 : 62\frac{2}{3} \times 52 :: 56$ liv. 3 on. 42 liv. $\frac{1}{2}$ on. On ſait par les principes de la méchanique, que ſi le pendule eſt frappé au centre du plateau GHIK, le corps choquant éprouvera la même réſiſtance, que ſi le poids de 42 liv. $\frac{1}{2}$ once, que l'on vient de trouver, étoit réuni & concentré à ce point, & que le reſte du pendule fût ſans peſanteur (*). Suppoſons donc que le poids de la balle eſt de $\frac{1}{12}$ de livre, ou $\frac{1}{504}$ de 42 liv. $\frac{1}{2}$ once, on trouvera par les loix du choc des corps, relativement à deux corps qui ſe choquent ſans réjaillir, que la vîteſſe après le choc eſt $\frac{1}{505}$ de la vîteſſe du corps choquant avant le choc. Si l'on connoît donc la vîteſſe du point où la balle a frappé, on la multipliera par 505 & l'on aura la vîteſſe de la balle avant le choc.

Or il eſt aiſé de reconnoître la vîteſſe de ce point après le choc par la corde de l'arc qu'il a

(*) Voyez ci-après la note 9.

parcouru. Car on fait que tout corps ſuſpendu par un fil & mis dans un mouvement vibratoire, s'éleve, en décrivant un arc de cercle, à la même hauteur où il monteroit, s'il étoit projeté verticalement avec la vîteſſe qu'il a au point le plus bas de l'arc décrit. Mais cette hauteur n'eſt autre choſe que le ſinus verſe de cet arc, qu'il eſt aiſé de connoître par le moyen de ſa corde & du rayon; la théorie de la chûte des corps ſuffit donc pour déterminer cette vîteſſe.

Par exemple, la corde de l'arc décrit par le pendule après le choc, & qu'on a meſurée ſur le ruban, a ſouvent été de $17\frac{1}{4}$ pouces. Le point L où le ruban eſt attaché, étoit éloigné de l'axe EF de $71\frac{1}{8}$ pouces. Faiſant donc la proportion $71\frac{1}{8} : 66 :: 17\frac{1}{4} : 16$; le quatrieme terme 16 ſera la corde de l'arc décrit par le centre du plateau GHIK, or le ſinus verſe d'un arc dont la corde eſt de 16 pouces & le rayon de 66, eſt de 1,93939 pouces; & la vîteſſe qui feroit monter un corps à cette hauteur, ou, ce qui revient au même, la vîteſſe qu'il acquerroit en tombant librement d'une hauteur de 1,93939 pouces, eſt de $3\frac{1}{4}$ pieds par ſeconde.

Pour trouver maintenant la vîteſſe avec laquelle la balle vient frapper le centre du plateau GHIK, lorſque, par la premiere vibration du pendule, il paſſe $17\frac{1}{2}$ pouces du ruban entre les deux lames de l'inſtrument NV ; il n'y a qu'à multiplier le nombre trouvé de $3\frac{1}{4}$ pouces par 505. Le produit 1641 ſera le nombre de pieds, que la vîteſſe de la balle, à l'inſtant du choc, eſt capable de lui faire parcourir en

une

une feconde d'un mouvement uniforme. Car on a vu que le point frappé avoit une vîteffe de 3 $\frac{1}{4}$ par feconde ; & que celle de la balle, au moment du choc, devoit être 505 fois plus grande. Ainfi quand une balle, qui pefe $\frac{1}{12}$ de livre, frappe le centre du plateau GHIK, & que le pendule dans fon mouvement entraîne 17 $\frac{1}{4}$ pouces du ruban, cette balle doit avoir une vîteffe de 1641 pieds par feconde. Et comme par la difpofition de toutes les parties de notre machine, la partie du ruban qui paffe par l'inftrument NV, eft toujours exactement égale à la corde de l'arc décrit par le bas du pendule ; que d'ailleurs ces cordes font toujours, comme on fait, dans la même rapport avec les vîteffes communiquées au pendule par le choc; il eft évident que les parties du ruban qui paffent par NV, chaque fois qu'une balle frappe le pendule, font proportionnelles aux vîteffes de la balle. Donc la longueur de 17 $\frac{1}{4}$ pouces, eft à la partie du ruban que le pendule aura entraînée dans un autre cas, comme 1641 pieds eft au nombre de pieds que la vîteffe de la balle dans le même cas, lui fera parcourir en une feconde.

L'on voit donc en général, quel eft l'ufage de cette machine pour trouver la vîteffe d'une balle, de quelqu'efpece qu'elle foit. Mais afin que rien n'arrête ceux qui voudront faire eux-mêmes ces expériences, j'ajouterai ici quelques remarques pour leur en faciliter la pratique, & pour prévenir les accidens qui peuvent arriver.

J'obferverai d'abord, pour qu'on ne regarde point le plateau GHIK comme une piece inutile, que fi avec une forte charge on tiroit

immédiatement ſur le fer, la balle ſe briſeroit par le choc, & les morceaux réjailliroient avec aſſez de force pour s'enfoncer dans les pieces de bois de la machine. D'ailleurs, ſans parler des autres accidens qui pourroient en réſulter, notre calcul ne ſeroit point juſte, puiſqu'il eſt fondé ſur l'hypotheſe que le corps choquant ne réjaillit point après le choc.

Le poids du pendule & l'épaiſſeur du plateau doivent être proportionnés à la groſſeur des balles qu'on emploie; un pendule tel que je viens de le décrire, peut fort bien ſervir pour toutes ſortes de balles au deſſous de 3 ou 4 onces, pourvu que pour les plus peſantes, le plateau ait 7 à 8 pouces d'épaiſſeur. Le bois de hêtre eſt le plus propre à cet uſage.

Il ſeroit dangereux, lorſqu'on tire, de ſe tenir à côté du pendule, à moins que le plateau ne fût aſſez épais, pour que la balle ne pût pas pénétrer juſqu'au fer : car ſi elle heurtoit le fer avec une force ſuffiſante, elle s'y briſeroit, & les éclats ne pouvant pas réjaillir à travers le bois, ſe feroient un paſſage entre le fer & le plateau, & ſeroient portés à une diſtance aſſez conſidérable.

Comme on ne peut attacher le plateau de bois ſur le fer que par le moyen des vis, dont les têtes reſtent à découvert; il peut arriver que la balle en rencontre une, elle ſe briſe alors en éclats qui volent de tous côtés.

Si la charge de poudre eſt aſſez foible pour qu'il n'en réſulte à la balle qu'une viteſſe de 400 à 500 pieds par ſeconde, la balle ne s'enfoncera point dans le bois du plateau, elle ſera réfléchie avec d'autant plus de force, que le bois

eſt plus dur; je n'ai pas fait une attention particuliere à cette force, je ſais ſeulement qu'elle eſt aſſez conſidérable pour que la figure de la balle ſoit altérée, par les corps qu'elle rencontre.

Comme l'honneur attaché aux recherches philoſophiques ne conſiſte pas à braver les dangers auxquels elles peuvent expoſer; il eſt à propos, pour plus de ſûreté, de fixer ſolidement le canon ſur un établi inébranlable, & d'y mettre le feu avec une lance à feu dont la compoſition ne ſoit pas trop vive. Tous les canons de fuſil ne ſont pas également propres à cet uſage; j'ai ſouvent éprouvé, à mes dépens, que ceux qui ont les dimentions ordinaires, ne réſiſtent pas long-temps ſans crever. Le canon, qui m'a le mieux réuſſi & que j'ai fait fabriquer exprès pour cet uſage, eſt preſqu'auſſi fort à la bouche qu'à la culaſſe; l'épaiſſeur du métal eſt à peu près par-tout égale à ſon calibre.

On aura ſoin à chaque expérience de peſer poudre avec la plus grande exactitude, & de la charger de façon qu'il n'en reſte point au devant de la balle. La bourre doit être d'étouppes, toujours en même quantité & jamais plus qu'il n'en faut pour contenir la charge dans ſon lieu. Si on laiſſe un vuide entre la balle & la bourre, il faudra en meſurer la longueur, parce qu'elle entre pour quelque choſe dans l'eſtimation de la viteſſe de la balle & de la force du coup; quand même on ne changeroit rien ni à la balle, ni à la charge de poudre. Enfin, il faut que la machine ſoit aſſez éloignée du canon, pour que la flamme ne puiſſe point l'atteindre & contribuer au mouvement du pendule;

ce qui arrive lorſque la charge étant de $\frac{1}{2}$ once de poudre, la diſtance n'eſt pas au-delà de 16 à 18 pieds. J'ai éprouvé qu'avec des charges plus fortes, la flamme s'étendoit à plus de 25 pieds; ainſi la diſtance que j'ai preſque toujours choiſie, a été de 18 à 20 pieds. Les expériences que je rapporterai dans la ſuite me donneront occaſion d'entrer dans un plus grand détail, & de faire d'autres obſervations à ce ſujet.

PREMIERE REMARQUE.

La méthode que notre Auteur décrit ici, pour trouver la viteſſe d'une balle par le moyen de l'expérience, eſt très-ingénieuſe & une des plus utiles inventions qu'on ait faites depuis lontemps dans l'Artillerie; car tout ce qu'on a pratiqué juſqu'à préſent à cet effet, n'a pu donner que des réſultats ſouvent erronés & toujours incertains. La deſcription de la machine eſt ſi bien détaillée, que l'on peut aiſément en faire conſtruire une pareille; mais ſon uſage pour découvrir la vîteſſe réelle d'une balle, a encore beſoin de quelques éclairciſſemens. Il faut en premier lieu connoître le poids du pendule, ce que l'on trouve par une peſée à l'ordinaire. On obſervera ſeulement que, dans le poids du pendule, on doit comprendre celui de toutes les parties du pendule qui participent enſemble à ſon mouvement, & par conſéquent celui de la traverſe EF. Cette traverſe ou, pour mieux dire, la ligne ſuivant laquelle elle eſt appuyée ſur les bras R, S, doit être placée horizontalement; car cette ligne eſt l'axe autour duquel le pendule fait ſes vibrations, & duquel il faut compter les diſtances des centres de gravité &

d'oscillation. On mesurera à cet effet la longueur du pendule, depuis le bord inférieur HI, où est attaché le ruban LMW, jusqu'à son axe de mouvement; cette longueur devant aussi entrer dans le calcul de la vitesse de la balle. Pour trouver ensuite la distance du centre de gravité à l'axe, on élevera le pendule, en le faisant tourner autour de cet axe, jusqu'à ce qu'il soit dans une position horizontale (fig. 4.); & on le fixera dans cette situation par le moyen d'une corde, dont l'un des bouts sera attaché à l'extrémité L du pendule; on fera passer cette corde sur une poulie M, disposée de maniere que le brin LM soit vertical, & l'on suspendra à l'autre bout un poids W qui fasse équilibre avec le pendule, en le soutenant dans une situation horizontale. Ce poids étant connu, il sera au poids du pendule, comme la distance de son centre de gravité à l'axe de mouvement, est à la distance du point L au même axe. Soit donc le poids total du pendule $= P$; celui du poids W qui lui fait équilibre $= Q$; la distance DL du point L à l'axe EF $= a$; la distance DQ du centre de gravité du pendule supposé en $Q = g$, on aura, par les loix de la statique, $Q : P :: g : a$, ou $g = \frac{aQ}{P}$. Soit maintenant S le centre d'oscillation du pendule, & $DS = f$; cette distance f sera la longueur d'un pendule simple qui fait ses vibrations dans le même temps que le premier. Ainsi, pour trouver la valeur de f, il faut connoître la durée d'une vibration de ce pendule. Pour cela, mettez le pendule en mouvement, en lui faisant faire des oscillations qui n'excedent point

5 ou 6 degrés, parce qu'autrement elles ne feroient point isochrones : observez, par le moyen d'une bonne montre, combien il fait de vibrations en 1, 2 ou 3 minutes. Soit, par exemple, n le nombre d'oscillations faites en trois minutes ou 180 $''$; puisque les oscillations d'un pendule simple, dont la longueur est de 3, 16625 pieds de Rhin, sont chacune précisément d'une seconde ; ce pendule fera 180 oscillations en trois minutes. Mais les temps pendant lesquels deux pendules simples de différentes longueurs font leurs vibrations, sont entre eux comme les racines quarrées de ces longueurs ; donc puisque le pendule qui a 3, 16625 pieds de longueur, fait une oscillation par seconde, & que celui dont la longueur est en f en doit faire une en $\frac{180''}{n}$; on aura $1 : \frac{180}{n} :: \sqrt{3,16625} : \sqrt{f}$; ce qui donne $f = \frac{32400 \times 3,16625}{nn} = \frac{02586\frac{1}{2}}{nn}$ pieds de Rhin. Il est donc aisé de trouver la valeur de f en pieds de Rhin, & ce n'est point sans raison que nous nous servons de cette mesure préférablement à toute autre : elle a, pour les calculs de la Méchanique, un avantage que les autres especes de mesures n'ont pas ; c'est qu'un corps qui tombe librement, parcourt dans la premiere seconde précisément 15625 milliemes du pied de Rhin, & que ce nombre 15625 est un quarré parfait, dont la racine 125 est d'un usage très-commode dans le calcul. Il est d'ailleurs facile de convertir le pied de Rhin en pieds de Roi, ou en pieds de Londres, attendu que 1,035 pieds de Rhin = 1 pied de Roi, & 0,970

pieds de Rhin = 1 pied de Londres. Dans l'exemple de l'Auteur, le pendule faisoit 200 oscillations en 253 secondes; faisant donc cette proportion $1 : \frac{253}{200} :: \sqrt{3,16625} : \sqrt{f}$, on aura $f = \frac{253 \times 253 \times 3,16625}{40000} = 5,0667$ pieds de Rhin, ou 5 pieds 2 $\frac{2}{3}$ pouces anglois, ou enfin 62 $\frac{2}{3}$ pouces, ainsi que notre Auteur l'a trouvé.

SECONDE REMARQUE.

La nature du pendule étant ainsi connue, on peut le mettre en expérience, & déterminer, par son moyen, la vitesse d'une balle. Soit donc le poids du pendule entier = P, sa longueur DL = a (fig. 5), son centre de gravité au point Q & DQ = g, son centre d'oscillation en S, & DS = f, lesquelles quantités peuvent être connues par les moyens qu'on vient de voir. Supposons maintenant que la balle frappe le pendule au point V, & que, par ce choc, il parvienne à la position Dl, en décrivant un arc dont on connoîtra la corde Ll, par le moyen du ruban. On mesurera la distance DV, que l'on fera = b, le poids de la balle = p & la corde Ll = k. Cela posé, on trouvera la vîtesse de la balle suivant la méthode de l'Auteur, en disant : le quarré de la distance DV, ou b^2, est au produit DQ × DS ou fg, comme le poids du pendule P est à un quatrieme terme $= \frac{fg}{bb}$P. Ainsi l'effet de la balle est le même que si, au lieu de la masse totale du pendule, elle eût choqué un corps placé en V, dont le poids seroit

$\frac{fg}{bb}$ P (9); & comme la balle n'eſt point réfléchie, la communication de la vîteſſe ſe fera ſelon les loix du choc des corps non élaſtiques. Si la vîteſſe de la balle qui frappe en V eſt égale à celle qu'elle auroit acquiſe en tombant d'une hauteur $= v$, & qu'elle ſoit par conſéquent proportionnelle à $\sqrt{v}$, la quantité de mouvement de cette balle, avant le choc, aura été $= p\sqrt{v}$, & elle ſera la même après le choc. La vîteſſe du point V, après le choc, ſera donc $= \frac{p\sqrt{v}}{p + \frac{fg}{bb}P}$ $= \frac{bbp\sqrt{v}}{bbp+fgP}$; & cette vîteſſe doit le faire monter, à la premiere oſcillation, à une hauteur $= \frac{b^4ppv}{(bbp+fgP)^2}$: or, la hauteur à laquelle le point L eſt monté dans le même temps, eſt PL $= \frac{Ll \times Ll}{2\,DL} = \frac{kk}{2a}$. Faiſant donc DL $= a$ eſt à DV $= b$ comme $\frac{kk}{2a}$ eſt à $\frac{bkk}{2aa}$; ce quatrieme terme ſera une nouvelle expreſſion de la hauteur à laquelle le point V doit monter, ce qui donne cette équation $\frac{b^4ppv}{(bbp+fgP)^2} = \frac{bkk}{2aa}$; d'où l'on tire $v =$

(9) Car ſi le point frappé du pendule prend une vîteſſe u, le moment de la force d'inertie du pendule ſera $= \frac{u}{b}\, fmrr$ (art. 639. tom. IV. du Cours de M. Bézout) $= \frac{u}{b}\, fgP$ (art. 656. *ibid.*). Donc la maſſe qui, placée en V recevroit la même viteſſe u, doit donner, en nommant M cette maſſe, $Mbu = \frac{u}{b}\, fgP$, ou $M = \frac{fg}{bb}P$, c'eſt-à-dire, $bb : fg :: P : M$.

$\frac{kk(fgP+bbp)^2}{2aab^3pp}$, & $\sqrt{v} = \frac{k(fgP+bbp)}{abp\sqrt{2b}} = \frac{fgP+bbp}{abp}$ $\times \frac{k}{\sqrt{2b}}$: de là on trouve la vraie vîteſſe de la balle, comme il ſuit.

Puiſqu'un corps qui tombe librement, parcourt 15625 milliemes d'un pied de Rhin dans la premiere ſeconde de ſa chûte, il acquiert une vîteſſe par ſeconde de 31250 de ces mêmes parties. Mais les vîteſſes acquiſes, en tombant de différentes hauteurs, ſont entre elles comme les racines de ces hauteurs; on a donc $\sqrt{15625} : \sqrt{v} :: 31250$ eſt à la vîteſſe par ſeconde due à la hauteur v. Cette vîteſſe eſt donc $= \frac{31250\sqrt{v}}{\sqrt{15625}}$ $= 250\sqrt{v}$ milliemes du pied de Rhin, lorſque v exprime un nombre de ces mêmes parties. Maintenant, puiſque $\frac{fgP+bbp}{abp}$ peut être regardé commme un nombre abſtrait, & qu'il importe peu quelle eſpece de meſure on repréſente par les lettres a, b, f, g, p, & P, il ſuffira que les quantités k & b, ou la fraction $\frac{k}{\sqrt{2b}}$, expriment des milliemes du pied de Rhin; alors la vîteſſe de la balle par ſeconde ſera d'autant de ces parties, que le nombre $\frac{250(fgP+bbp)}{abp} \times \frac{k}{\sqrt{2b}}$ en contiendra, ou d'un nombre de pieds de Rhin, exprimé par $\frac{fgP+bbp}{abp} \times \frac{k}{4\sqrt{2b}}$. Pour la commodité du calcul, on changera cette derniere expreſſion en celle-ci : $\left(\frac{fg}{ab} \times \frac{P}{p} + \frac{b}{a}\right)$ $\times \frac{k}{4\sqrt{2b}}$, dans laquelle $\frac{k}{\sqrt{2b}}$ exprime des mil-

liemes du pied de Rhin. Soit donc, comme dans l'exemple de notre Auteur :

$P = 56 \frac{3}{16}$ liv.

$p = \frac{1}{12}$ liv. donc $\frac{P}{p} = 674 \frac{1}{4}$

$a = 71 \frac{1}{8}$ pouces
$f = 62 \frac{2}{3}$ p.
$g = 52$ p. } de Londres.
$b = 66$ p. . . = 5335 } milliemes du
$k = 17 \frac{1}{4}$ p. . . = 1395 } pied de Rhin.

on aura $\frac{fg}{ab} = \frac{62 \frac{2}{3} \times 52}{71 \frac{1}{8} \times 66} = \frac{3258 \frac{2}{3}}{4694 \frac{1}{4}}$

$$\& \frac{fg}{ab} \times \frac{P}{p} = 468{,}053$$

$$\frac{b}{a} = 0{,}928$$

$$\frac{fg}{ab} \times \frac{P}{p} + \frac{b}{a} = 468{,}981$$

On a en outre $2b = 10670$, &, achevant le calcul par les logarithmes, on aura :

$$l\,2b = 4{,}0181644$$
$$l\sqrt{2b} = 2{,}0140822$$
$$l\,4 = 0{,}6020600$$

$$l\,4\sqrt{2b} = 2{,}6161422$$

retranchant de $lk = 3{,}1445742$

reſte . . . $0{,}5284320$

ajoutant $l\left(\frac{fg}{ab} \times \frac{P}{p} + \frac{b}{a}\right) = 2{,}6711544$

on aura . . . $3{,}1995864$

qui eſt le logarithme de 1583,385. D'où l'on

voit que la vîtesse par seconde de la balle, est de 1583 pieds de Rhin. Et comme 970 de ces pieds font 1000 pieds anglois, il suit que cette vîtesse est de 1632 pieds anglois, ce qui ne differe que de neuf pieds du résultat trouvé par l'Auteur : il est à remarquer que la vraie vîtesse de la balle doit effectivement être plus grande qu'elle n'est donnée par le calcul ; parce que la résistance de l'air empêche que le pendule ne monte aussi haut qu'il devroit le faire en vertu de la vîtesse qui lui est communiquée. Nous examinerons l'effet de cette résistance après que nous aurons fait voir sur quel principe est fondée la regle que l'Auteur donne pour calculer la vîtesse d'une balle.

TROISIEME REMARQUE.

La démonstration de la regle, d'après laquelle l'Auteur détermine la vîtesse d'une balle, en considérant l'effet de son impulsion contre le pendule, se trouve en si peu d'endroits, qu'elle peut fort bien être ignorée du plus grand nombre des Lecteurs. D'ailleurs, cette matiere ne laissant pas d'avoir ses difficultés, il est à propos de l'éclaircir, autant que notre objet actuel pourra le comporter. Il s'agit ici du changement qui arrive au mouvement de deux corps qui se choquent ; les loix du choc direct de deux corps, élastiques ou non élastiques, se trouvent dans presque tous les Traités de méchanique ; mais ces Loix connues ne suffisent pas pour déterminer les circonstances du mouvement de deux corps qui se choquent obliquement ; c'est-à-dire, quand l'impulsion se fait

fuivant une ligne oblique à l'endroit du contact, ou fuivant une ligne perpendiculaire à cet endroit, & qui ne paffe pas par le centre de gravité des deux corps. Il y a plus encore dans le cas préfent, c'eft que l'un des deux corps, favoir le pendule qui reçoit la percuffion, ne fe meut pas librement, mais autour d'un axe: circonftance à laquelle il faut principalement avoir égard dans cette recherche. Or, pour déterminer les changemens qu'éprouve un corps mobile autour d'un axe, on doit confidérer fon moment d'inertie, c'eft-à-dire, la fomme des produits faits en multipliant chaque particule de ce corps par le quarré de fa diftance à l'axe de mouvement, au lieu que dans le cas d'un mouvement libre, on n'a befoin que de la fimple inertie, ou du poids du corps. En outre ce n'eft pas fimplement la force agiffante qu'il faut confidérer quand le mouvement fe fait autour d'un axe; mais fon moment, qui n'eft autre chofe que le produit de cette force, multipliée par la diftance perpendiculaire de fa direction à l'axe de mouvement. Ce dernier moment, divifé par le moment d'inertie du pendule, donnera la force accélératrice abfolue du mouvement autour de l'axe; & fi on multiplie cette fraction par la diftance d'un point quelconque à l'axe, on aura la force accélératrice de ce point. Dans le mouvement libre, au contraire, on a la force accélératrice du mobile en divifant fa force par fon inertie ou fon poids. Maintenant puifque la diftance $DS = f$ du centre d'ofcillation S à l'axe, fe trouve en divifant le moment d'inertie du pendule par le produit de fon poids multiplié par la diftance $DQ = g$

de ſon centre de gravité Q à l'axe ; c'eſt-à-dire, par Pg, on aura Pfg pour le moment d'inertie du pendule. Il eſt aſſez ordinaire que, dans la théorie du choc des corps, on ne faſſe point attention au temps qu'exigent les changemens occaſionnés dans les deux corps par la percuſſion, dans l'idée que ces changemens ſe font ſubitement. Mais l'on pourroit faire voir la fauſſeté de cette opinion par pluſieurs raiſons, ſi le cas préſent n'en fourniſſoit une des plus évidentes : car puiſque la balle s'enfonce bien avant dans le plateau du pendule, on ne peut diſconvenir qu'il ne faille un certain temps pour cela. Il eſt vrai que ce temps eſt très-court, & l'on peut ſuppoſer ſans erreur que, pendant ſa durée, le déplacement du pendule n'a point été ſenſible. Soit donc DL (fig. 5) la ſituation naturelle du pendule, Q ſon centre de gravité, S ſon centre d'oſcillation, & par conſéquent DQSL une ligne verticale ; que l'on faſſe, comme ci-devant, le poids total du pendule $= \text{P}$; $\text{DL} = a$; $\text{DQ} = g$; $\text{DS} = f$; ſoit TV la direction horizontale, ſuivant laquelle la balle, dont le poids $= p$, vient frapper le pendule au point V, où ſe fait le premier choc, & $\text{DV} = b$. Si h eſt la hauteur d'où un corps doit tomber pour acquérir une vîteſſe égale à celle de la balle, cette vîteſſe ſera repréſentée par $\sqrt{h}$; & $\frac{1}{4}\sqrt{h}$ ſera le nombre de milliemes du pied de Rhin qu'elle fera parcourir à la balle en une ſeconde, ſi la hauteur h eſt évaluée en milliemes du pied de Rhin. Suppoſons maintenant que, dans un temps $= t$, le pendule ait été tranſporté en Dl, & que la balle ſe ſoit déjà enfoncée juſqu'en u

dans le plateau ; nommons le petit arc $Vv = x$; l'enfoncement $vu = y$; la vîteſſe acquiſe du point $v = \sqrt{v}$, & celle de la balle en $u = \sqrt{u}$: cela poſé, puiſque dans le temps infiniment petit dt, le point v du pendule aura parcouru l'eſpace dx, & la balle un eſpace $= dx + dy$; on aura, par les principes de méchanique, $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{dx+dy}{\sqrt{u}}$. La balle continuant de s'enfoncer, & trouvant de la réſiſtance dans le bois, la vîteſſe du pendule en ſera augmentée, & celle de la balle diminuée. Soit donc V la force de la réſiſtance du bois, $\frac{V}{p}$ ſera la force qui retarde le mouvement de la balle ; d'où l'on tire $dv = -\frac{V}{p}(dx+dy)$. Conſidérant enſuite l'action de la force V ſur le pendule, ſon moment ſera $= Vb$; & comme le moment d'inertie du pendule eſt $= Pfg$, la force accélératrice du pendule au point v ſera $\frac{Vbb}{Pfg}$. Donc $dv = \frac{Vbbdx}{Pfg}$, & $\frac{du}{dv} = \frac{-Pfg(dx+dy)}{pbbdx}$; & parceque $\frac{dx+dy}{dx} = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$, on aura $\frac{du}{dv} = \frac{-Pfg\sqrt{u}}{pbb\sqrt{v}}$, ou $\frac{pbbdu}{\sqrt{u}} + \frac{Pfgdv}{\sqrt{v}} = 0$, dont l'intégrale eſt $pbb\sqrt{u} + Pfg\sqrt{v} = pbb\sqrt{h}$, parce qu'au commencement du choc $v = 0$ & $u = h$. Mais l'effet du choc ceſſe totalement, lorſque le point v & la balle ont une vîteſſe commune ; nommant cette vîteſſe $\sqrt{s}$, on aura $pbb\sqrt{s} + Pfg\sqrt{s} = pbb\sqrt{h}$, & $\sqrt{s} = \frac{pbb\sqrt{h}}{pbb+Pfg}$. Cette expreſſion s'accorde parfaitement avec celle que l'Auteur a donnée, & montre que, juſqu'ici, ſa regle eſt bonne. Maintenant, puiſque $\sqrt{s}$ exprime la vîteſſe communiquée par la percuſſion au point V du pen-

dule ; $\frac{Vs}{b} = \frac{pb\sqrt{h}}{pbb + Pfg}$ exprimera d'une maniere abſolue la vîteſſe de l'oſcillation ; d'où l'on voit que cette oſcillation ſera très-petite, ſi l'on prend DV très-petit, & qu'elle ſera encore très-petite, ſi DV eſt trop grand. On peut donc propoſer de trouver en quel point la balle doit frapper le pendule avec la vîteſſe $\sqrt{h}$, pour que l'oſcillation ſoit la plus grande qu'il ſera poſſible. On trouvera $Pfg = pbb$, & $b = DV = \sqrt{\frac{Pfg}{p}}$. Ce point eſt le centre de percuſſion du pendule (10) ; d'où il ſuit que le centre de percuſſion n'eſt, ni le centre de gravité, ni le centre d'oſcillation ; qu'outre ces deux

(10) Il paroît que M. Euler n'attache point ici au centre de percuſſion l'idée qu'on doit en avoir, car il s'enſuivroit que le centre de percuſſion d'un corps devroit dépendre eſſentiellement de la maſſe du corps qui le choque ; que ce point ne feroit preſque jamais partie du corps auquel il appartient, & qu'il ne pourroit concourir avec le centre d'oſcillation, que dans le ſeul cas où p feroit $= \frac{Pg}{f}$. Tout cela me ſemble bien éloigné de ce qu'on entend par centre de percuſſion, qui ne peut être que le point d'un corps, ſoit que ce corps ſoit choquant ou choqué, où ſe réuniſſent les efforts agiſſans de toutes ſes parties, s'il eſt choquant, ou les efforts de leurs réſiſtances, s'il eſt choqué. En général, le centre de percuſſion d'un corps eſt, à l'égard de la maſſe de ſes différentes parties animées d'un certain degré de vîteſſe, ce que le centre de gravité eſt à l'égard de ces parties conſidérées ſimplement comme matérielles, & le centre d'oſcillation par rapport à ces mêmes parties ſoumiſes à l'action de la peſanteur. D'où l'on voit que dans un corps libre, le centre de percuſſion eſt le même que le centre de gravité, & que, dans un corps aſſujetti à tourner autour d'un axe fixe, les centres de percuſſion & d'oſcillation ſont à la même diſtance de cet axe.

Digitized by Google

points, il faut encore avoir égard au rapport du poids du pendule à celui de la balle, & que le centre de percussion tombe très-bas, lorsque le poids p de la balle est très-petit par rapport au poids P du pendule. Mais il est inutile, dans le cas présent, d'avoir égard au centre de percussion, il est même plus à propos que l'arc décrit par le pendule ne soit pas trop grand. Après avoir déterminé la vitesse du point V, il nous reste à trouver à quelle hauteur cette vitesse doit faire monter le pendule. On sait que le mouvement d'un pendule est le même qu'il auroit, si toute sa pesanteur étoit réunie au centre d'oscillation; nous considérerons donc ici ce centre, en observant toutefois qu'il n'est plus à la même place, depuis que la balle est enfoncée dans le plateau. Pour trouver ce point, on cherchera le moment d'inertie du pendule, lequel, à cause de la balle, est $= P\int g + pbb$; on le divisera par $Pg + pb$, & on aura $\frac{P\int g + pbb}{Pg + pb}$ pour la distance du centre d'oscillation à l'axe de mouvement. On fait abstraction ici du volume de la balle. On dira donc : b est à $\frac{P\int g + pbb}{Pg + pb}$, comme la vitesse du point V, c'est-à-dire, comme $\sqrt{s} = \frac{pbb\sqrt{h}}{P\int g + pbb}$ est à la vitesse du centre d'oscillation, que l'on trouvera $= \frac{pb\sqrt{h}}{Pg + pb}$. Ce centre doit donc faire sa premiere vibration dans un arc dont le sinus verse est $= \frac{ppbbh}{(Pg + pb)^2}$, & la corde $= \frac{pb}{Pg + pb}\sqrt{\frac{2h(P\int g + pbb)}{Pg + pb}}$: ainsi la corde de l'arc décrit par le point L, sera $= \frac{pab\sqrt{2h}}{\sqrt{(Pg + pb)(P\int g + pbb)}}$; & cette corde, que l'on a

trouvée

trouvée par l'expérience, ayant été nommée k, on aura $k = \frac{pab\sqrt{2h}}{\sqrt{(Pg+pb)(Pfg+pbb)}}$, & $\sqrt{h} = \frac{k\sqrt{(Pg+pb)(Pfg+pbb)}}{pab\sqrt{2}}$. La lettre h exprime ici ce qu'on a nommé v ci-dessus, c'est-à-dire, la hauteur d'où la vîtesse de la balle eût été acquise par la chûte. Mais la regle de l'Auteur a donné $\sqrt{h} = \frac{k(Pfg+pbb)}{pab\sqrt{2b}}$; elle n'est donc pas juste. L'Auteur s'est trompé, en ce qu'il a cru que le mouvement du pendule étoit le même que si toute la pesanteur qu'il a trouvée étoit réunie au point V, ce qui ne peut avoir lieu que pour le centre d'oscillation. Ainsi, pour rectifier la formule de notre Auteur, & rendre la vîtesse qu'elle donne conforme à la vérité, il faut la multiplier par $\sqrt{\frac{Pgb+pbb}{Pfg+pbb}}$. D'où l'on voit que la vîtesse de la balle trouvée par l'Auteur est trop petite lorsque $b > f$, & trop grande lorsque $b < f$. Mais cette différence est ordinairement si petite, qu'elle peut facilement échapper à l'observation : car lorsque p est très-petit par rapport à P, & qu'il y a peu de différence entre f & b, il faut encore multiplier la vîtesse que l'Auteur a trouvée, par $1 + \frac{b-f}{2f}$ (11), ce qui, dans son exemple, fait

---

(11) Pour trouver l'expression $1 + \frac{b-f}{2f}$, on remarquera que la fraction $\frac{Pgb+pbb}{Pfg+pbb}$ devient, en effectuant la division, $\frac{b}{f} - \frac{pb^3}{Pf^2g} + \frac{pb^5}{P^2f^3g^2} - $ &c. $= \frac{b}{f}$, parce que les autres termes, qui sont de peu de valeur, peuvent être négligés. Donc $\sqrt{\frac{Pgb+pbb}{Pfg+pbb}} = \surd$

$1 + \frac{3\frac{1}{2}}{2 \times 62\frac{2}{3}} = 1 + \frac{5}{188}$; c'eſt-à-dire, qu'à la vîteſſe de 1632 pieds anglois, il faut encore en ajouter 43, & on aura une vîteſſe de 1675 pieds par ſeconde; ce qui ne laiſſe pas de faire une différence aſſez ſenſible.

Puiſque p eſt extrêmement petit en comparaiſon de P, on aura, à peu près, $\sqrt{(Pg + pb)(Pfg + pbb)} = Pg\sqrt{f} + \frac{1}{2}pb\sqrt{f} + \frac{\frac{1}{2}pbb}{\sqrt{f}} = \frac{Pfg + \frac{1}{2}pb(f+b)}{\sqrt{f}}$. Donc $\sqrt{h} = \frac{Pgk\sqrt{f}}{pab\sqrt{2}} + \frac{k(f+b)}{2a\sqrt{2f}} = \frac{k}{a}\left(\frac{Pg}{pb} + \frac{f+b}{2f}\right)\sqrt{\frac{f}{2}}$, ſi l'on ſuppoſe le nombre $\frac{k}{a}\left(\frac{Pg}{pb} + \frac{f+b}{2f}\right) = n$, & que f exprime des milliemes de pied de Rhin; la vîteſſe de la balle, à l'inſtant du choc, ſera exprimée par $\frac{n}{4}\sqrt{\frac{f}{2}}$ pieds de Rhin. Reprenons l'exemple de notre Auteur, dans lequel on a :

$k = 17\frac{1}{4}$
$a = 71\frac{1}{8}$ donc $\frac{k}{a} = 0,24253$
$P = 56\frac{3}{16}$ ℔.

$\frac{b}{f}$; or, puiſque b n'eſt ſuppoſé qu'un peu plus grand que f, on peut faire $\frac{b}{f} = 1 + q$, q étant une petite fraction; donc $\sqrt{\frac{b}{f}} = 1 + \frac{q}{2} - \frac{q}{8^2} +$ &c. $= 1 + \frac{q}{2}$, en négligeant les autres termes; mais $q = \frac{b}{f} - 1$, donc $1 + \frac{q}{2}$ ou $\sqrt{\frac{b}{f}} = 1 + \frac{b}{2f} - \frac{1}{2} = \frac{f+b}{2f} = 1 + \frac{b-f}{2f}$.

$p = \frac{1}{12}$ ℔. & $\frac{P}{p} = 674,25$
$g = 52$
$b = 66$ & $\frac{g}{b} = 0,788$
$f = 62\frac{2}{3}$ $\frac{Pg}{pb} = 531,309$
$\frac{f+b}{2f} = 1,032$

$\frac{Pg}{pb} + \frac{f+b}{2f} = 532,341$
Donc $n = 129,109$
& $\frac{n}{4} = 32,277$

De plus, f étant de $62\frac{2}{3}$ pouces du pied de Londres, on aura $\frac{f}{2} = 2532,75$ milliemes du pied de Rhin ; donc $\sqrt{\frac{f}{2}} = 50,326$, & $\frac{n}{4}\sqrt{\frac{f}{2}} = 1624,37$, c'est-à-dire, que la balle aura une vîtesse de 1624 pi. de Rhin, ou à peu près de 1675 pieds de Londres par seconde. Voyons maintenant de combien la balle s'enfonce dans le plateau : la résistance des fibres ligneuses pouvant être considérée comme uniforme, l'intégrale de l'équation $du = \frac{-V}{p}(dx + dy)$ sera $u = h - \frac{V}{p}(x + y)$; donc $x + y = \frac{p(h-u)}{V}$: l'autre équation $dv = \frac{Vbb\,dx}{Pfg}$ a pour intégrale $v = \frac{Vbbx}{Pfg}$ & $x = \frac{Pfgv}{Vbb}$. Or, quand le choc a totalement cessé, on a $u = v = \frac{p^2 b^4 h}{(Pfg + pbb)^2} = s$; donc l'enfoncement $vu = y = \frac{ph}{V} - s(Pfg + pbb) = \frac{ph}{V} - \frac{p^2 b^2 h}{V(Pfg + pbb)} = \frac{Pphfg}{V(Pfg + pbb)}$. D'où l'on voit que plus la distance DV $= b$ est grande, moins la balle s'enfonce

dans le plateau. Cet enfoncement *vu* fera auffi d'autant plus petit, que le moment d'inertie P*fg* du pendule eft plus petit. Mais comme il faut que le pendule ait une folidité fuffifante, on ne pourra empêcher que la balle ne s'enfonce trop avant, qu'en fe fervant d'un pendule le plus long & le plus léger par le bas qu'il fera poffible, & en tirant contre fa partie inférieure. En obfervant ce que nous venons de dire, peut-être parviendra-t-on à conftruire un pendule, dont on pourra faire ufage pour déterminer la vîteffe, non-feulement d'une balle de piftolet & de moufquet, comme a fait notre Auteur, mais encore d'un boulet de canon.

QUATRIEME REMARQUE.

La regle que l'Auteur donne pour trouver la vîteffe d'une balle par le moyen de la percuffion, n'eft donc bonne que quand la balle frappe le pendule à fon centre d'ofcillation: fi l'on tire plus haut ou plus bas, il en réfulte une vîteffe trop petite dans le premier cas, & trop grande dans le fecond; & il paroît que dans toutes fes expériences, le coup a porté au deffous du centre d'ofcillation, de forte que les vîteffes qu'il a trouvées doivent être trop petites. Mais nous avons à examiner une autre circonftance, qui a échappé à notre Auteur, & qui doit néanmoins rendre la vîteffe de la balle plus grande qu'on ne l'a trouvée par les calculs précédens; c'eft la réfiftance de l'air, dont l'effet eft d'empêcher le pendule de s'écarter de fa fituation naturelle, autant qu'il le feroit s'il n'y avoit point de réfiftance. Puifqu'on a donc fait abftraction de cette réfiftance, il eft

évident que la vraie longueur de la corde Ll (fig. 5), par laquelle on détermine la vîteſſe de la balle, doit être plus grande que l'expérience ne l'a indiquée; & que cette vîteſſe doit par conſéquent auſſi être augmentée d'autant. Mais quoique cette différence ſoit très-petite, parce que la réſiſtance ne produit pas ordinairement d'effet ſenſible ſur la premiere vibration du pendule, nous ne laiſſerons pas d'en faire l'objet de nos recherches, afin que nous ſoyons pleinement aſſurés de ſon efficacité, & ſi l'on doit y avoir égard ou non. Conſidérons à cet effet, la ſurface du pendule expoſée à l'action de l'air, dans une des poſitions où elle ſe trouve durant la premiere vibration. Soit donc la vîteſſe avec laquelle le point inférieur L (fig. 7) ſe meut autour de l'axe $EF = \sqrt{v}$, ou égale à la vîteſſe due à la hauteur v; la diſtance de ce point L à l'axe $EF = a$: ſoit auſſi menée à volonté une ligne horiſontale MPM ſur la ſurface du pendule, & $DP = x$; la vîteſſe de chaque point de cette ligne ſera $\frac{x}{a}\sqrt{v}$, & la hauteur d'où cette vîteſſe eſt acquiſe $= \frac{xxv}{aa}$. La réſiſtance de l'air ſur cette ligne ſera donc égale à la preſſion d'une colonne d'air dont la hauteur $= \frac{xxv}{aa}$. Si l'on fait la largeur $MM = b$, & qu'on mene la parallele infiniment proche mm; la ſurface $MMmm$ ſera $= bdx$, & la preſſion de l'air ſur cette ſurface $= \frac{bv}{aa}xxdx$. Mais comme ce n'eſt pas tant de la preſſion de l'air qu'il s'agit ici, que de ſon moment, ce moment ſera $\frac{bv}{aa}x^3dx$, dont l'intégrale eſt

$= \frac{bv}{aa} \left(\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{4} \overline{DO}^4 \right)$ Ainsi x devenant a, & faisant DO $= c$, le moment de la résistance de l'air sur la surface GHIK sera $\frac{bv}{4aa}(a^4 - c^4)$. On peut, sans erreur, faire abstraction de la résistance de l'air contre la partie DO du pendule, tant à cause de son peu de largeur, que parce que son moment est très-petit en comparaison de celui de la surface GHIK. Le moment de la résistance de l'air étant donc $\frac{b(a^4-c^4)}{4aa} v$, on cherchera le poids de la quantité d'air qui rempliroit l'espace $\frac{b(a^4-c^4)}{4aa}$, ou celui de la quantité d'eau qui rempliroit l'espace $\frac{b(a^4-c^4)}{3456\,aa}$; & nommant ce poids R, le moment de la résistance de l'air, sera $= Rv$.

Supposons maintenant le pendule parvenu à la position Dl, (fig. 5) & l'angle LD$l = z$, la vîtesse du point L, comme ci-dessus, $= \sqrt{v}$, & celle du point L, au commencement de la vibration, $= \sqrt{i}$. Lorsque le pendule, parvenu en Dl, s'écartera encore plus de la position DL, deux obstacles s'opposeront à son mouvement : son propre poids, & la résistance de l'air. Le moment de la résistance de l'air est Rv, en donnant au poids R la valeur trouvée ci-dessus. Le poids du pendule, qu'on a fait $=$ P, agit comme s'il étoit réuni au centre de gravité q ; & comme on a Dq $=$ DQ $= g$, le moment sera donc Pg $\sin z$. Mais le moment de la masse entiere du pendule est $=$ Pfg, comme on l'a déjà vu : donc la force absolue qui résiste au mouvement, est $= \frac{Pg \sin z + Rv}{Pfg}$, & cette

force eſt, au point l, $= \frac{Pag \sin z + Rav}{Pfg}$; ainſi, pendant que le point l parcourt l'élément de l'arc Ll qui eſt adz, on a $dv = \frac{-Pa^2 gdz \sin z - Ra^2 vdz}{Pfg}$ $= \frac{-a^2 dz \sin z}{f} - \frac{Ra^2 vdz}{Pfg}$, ou $dv + \frac{Ra^2 vdz}{Pfg} = \frac{-a^2 dz \sin z}{f}$. Pour rendre cette équation intégrable, on la multipliera par $e^{\frac{Raaz}{Pfg}}$, prenant e pour le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$; & pour abréger, on fera $\frac{Ra^2}{Pfg} = m$, & on multipliera par e^{mz}, ce qui donne $e^{mz}\ (dv + mvdz) = \frac{-a^2}{f}\ e^{mz}\ dz \sin z$, dont l'intégrale eſt $e^{mz} v = \frac{-a^2}{f} \int e^{mz} dz \sin z$. Mais $- \int dz \sin z = \cos z$, donc $- \int e^{mz} dz \sin z = e^{mz} \cos z - m \int e^{mz} dz \cos z$ (12) ; & comme $\int dz \cos z = \sin z$, on aura $\int e^{mz} dz \cos z = e^{mz} \sin z - m \int e^{mz} dz \sin z$. Donc $- \int e^{mz}\ dz \sin z = e^{mz}\ (\cos z - m \sin z) + mm \int e^{mz} dz \sin z$; d'où l'on tire $- \int e^{mz} dz \sin z = \frac{e^{mz} (\cos z - m \sin z)}{1 + mm}$. On aura donc cette équation : $e^{mz}\ v = \frac{e^{mz}\ aa (\cos z - m \sin z)}{(1 + mm) f} + A$. Pour déterminer la conſtante A, on remarquera qu'au commencement du mouvement on a $z = 0$, & $v = i$, donc $i =$

---

(12) Si ce calcul arrête quelques-uns des Lecteurs, nous obſerverons qu'il ſuffit de différentier les deux membres de cette équation, & l'on trouve la même quantité $e^{mz}\ dz \sin z$. Il en eſt de même de l'équation ſuivante.

$\frac{aa}{(1+mm)f} + A$, & par conſéquent $A = i - \frac{aa}{(1+mm)f}$: donc $e^{mz}v = i - \frac{aa + e^{mz}aa(cof z - m fin z)}{(1+mm)f}$. Si l'on ſuppoſe maintenant que Dl eſt le terme de la premiere vibration du pendule, & que de là il en commence une ſeconde; dans cette poſition, on aura $v = 0$, & $(1 + mm) fi = aa - e^{mz} aa (cof z - m fin z.)$

Mais alors la corde Ll ſera $= k$, & connue par l'expérience. On aura donc $\frac{1}{2} z = \frac{k}{2a}$; $cof \frac{1}{2} z = \sqrt{\left(1 - \frac{kk}{4aa}\right)}$; de plus $cof z = 1 - \frac{kk}{2aa}$, & $fin z = \frac{k}{a} \sqrt{\left(1 - \frac{kk}{4aa}\right)}$; par conſéquent $(1 + mm) fi = aa - e^{mz} aa \left(1 - \frac{kk}{2aa} - \frac{mk}{a} \sqrt{\left(1 - \frac{kk}{4aa}\right)}\right)$; ou $(1 + mm) fi = aa - e^{mz} \left(aa - \frac{1}{2} kk - \frac{1}{2} mk \sqrt{(4aa - kk)}\right)$.

Mais ſi la réſiſtance devient nulle, on aura $m = 0$, & la corde Ll ſera un peu plus grande que k, ſuppoſons-la $= s$, on aura $fi = \frac{1}{2} ss$; ainſi on pourra faire évanouir la quantité inconnue i, car on aura $(1 + mm) ss = 2aa - e^{mz} \left(2aa - kk - mk \sqrt{(4aa - kk)}\right)$. Cette équation donnera une valeur de s, ou de la corde de l'arc que le point L décriroit, s'il n'y avoit point de réſiſtance. Car les quantités a, k & $m = \frac{Raa}{Pfg}$ ſont connues, de même que z, qui eſt un angle dont la moitié a pour ſinus $\frac{k}{2a}$, en prenant le ſinus total $= 1$. On peut abréger ce calcul de deux façons : pre-

mièrement, la résistance de l'air étant très-peu considérable, m sera une fraction d'une si petite valeur, qu'à la place de e^{mz} on pourra mettre $1 + mz$, parce que les puissances plus élevées de m peuvent être négligées; on aura alors $(1 + mm) ss = kk - 2maaz + mkkz + mk\sqrt{(4aa - kk)}$, ou $ss = kk - 2maaz + mkkz + mk\sqrt{(4aa - kk)}$.

Secondement, l'angle LDl, dans ces sortes d'expériences, étant ordinairement de peu de degrés, le sinus de sa moitié sera, à peu près, égal à l'arc lui-même, c'est-à-dire que $\frac{1}{2}z = \frac{k}{2a} + \frac{k^3}{48a^3}$, & $z = \frac{k}{a} + \frac{k^3}{24a^3}$; donc $ss = kk - 2mak - \frac{mk^3}{12a} + \frac{mk^3}{a} + mk\sqrt{(4aa - kk)}$. Mais k étant très-petit par rapport à $2a$, on aura $\sqrt{(4aa - kk)} = 2a - \frac{kk}{2a}$; & par conséquent $ss = kk + \frac{2mk^3}{3a}$ ou $s = k + \frac{mkk}{3a}$, parce qu'on peut négliger les puissances plus élevées de k. On mettra donc $k + \frac{mkk}{3a}$ à la place de k, dans le calcul que nous avons fait précédemment. Et comme la vîtesse de la balle est proportionnelle à la corde k, il suffira de multiplier la vîtesse trouvée ci-dessus par $1 + \frac{mk}{3a}$; correction qui pourra toujours se faire, quand la résistance de l'air influera sensiblement sur le mouvement du pendule. Nous allons faire l'essai de cette théorie, sur l'exemple rapporté par notre Auteur. Quoiqu'il n'ait rien dit de l'étendue du plateau, il paroît cependant qu'il pouvoit avoir au moins 2 pieds de hauteur sur autant de

largeur ; on a donc DL $= a = 71 \frac{1}{8}$ pouces ; ou $a = 5,927$ pieds ; donc $c = 3,927$ & $b = 2$ pieds, ce qui donne :

$$a^4 = 1234,07$$
$$c^4 = 237,82$$

$$a^4 - c^4 = 996,25$$
$$\& \ b\,(a^4 - c^4) = 1992,50$$
$$\text{donc } \frac{b\,(a^4 - c^4)}{3456\,aa} = 0,01641$$

c'eſt-à-dire, que cet eſpace conntient $\frac{1641}{100000}$ de pied cubique ; & comme un pied cubique d'eau peſe environ 70 ℔. le poids R ſera de 1,1487 ℔. Or, P = 56,187 ℔. $f = 5,222$ pieds, & $g = 4,333$, on aura donc $m = \frac{Raa}{Pfg} = 0,03174$; &, à cauſe de $k = 1,4375$, $\frac{mk}{3a} = 0,002566$, ou, à peu près, $\frac{mk}{3a} = \frac{1}{400}$; de ſorte que la vîteſſe trouvée ci-deſſus eſt de $\frac{1}{400}$ trop petite, & qu'à 1675 pieds anglois, que nous avons trouvés, il faut encore ajouter 4 pieds, ce qui donnera 1679 pieds par ſeconde pour la vîteſſe de la balle. Mais l'Auteur a trouvé 1641 pieds pour cette vîteſſe, qui, ſelon la regle, ne devroit même être que de 1632 pieds ; ainſi on tombe déjà, en la ſuivant, dans une erreur de 43 pieds par ſeconde ; & comme il y a encore 4 pieds à ajouter à cauſe de la réſiſtance de l'air, il s'enſuit que la méthode donne une vîteſſe de 47 pieds plus petite qu'elle ne devroit être ; différence trop conſidérable, ſelon ſes propres principes, pour qu'elle puiſſe être négligée. Il eſt certain que nous n'avons pas ſuppoſé la réſiſtance de l'air

aussi grande qu'elle l'est réellement, & comme outre cela nous avons encore fait abstraction du frottement de l'axe sur ses appuis, on peut conclure en toute sûreté, que la vitesse de la balle dans cette expérience a dû être au moins de 1680 pieds anglois par seconde.



Google

PROPOSITION IX.

Comparer les vîteſſes réelles des balles tirées de différentes armes, avec celles qui réſultent de la théorie.

Nous avons enſeigné fort au long, dans la Propoſition précédente, la maniere de déterminer par l'expérience la vîteſſe avec laquelle une balle eſt chaſſée hors d'un fuſil : & nous avons fait voir dans la ſeptieme Propoſition, comment on trouve cette même vîteſſe par la théorie, en conſidérant la force de la poudre, & les dimenſions du canon. Nous allons maintenant comparer les réſultats de l'expérience avec ceux de la théorie ; afin que le parfait accord qui regne entre ces deux méthodes ſoit mis dans tout ſon jour, quoique l'une ſoit abſolument indépendante de l'autre.

Les premieres expériences ont été faites avec un canon pareil à celui de la ſeptieme Propoſition : la balle avoit $\frac{3}{4}$ de pouce de diametre ; la longueur du canon étoit de 45 pouces ; la longueur de la charge de poudre de $2\frac{5}{8}$ pouces ; le calibre du canon étoit de $\frac{1}{40}$ plus fort que le diametre de la balle, & la charge peſoit exactement 12 dragmes.

Le poids de la balle étoit de $\frac{1}{12}$ de la livre *avoir du poids*, comme dans la ſeptieme Propoſition ; mais le plateau du pendule peſoit quatre livres de moins que celui de l'exemple. D'après ces connoiſſances, on cherche d'abord par la

théorie quelle eſt la vîteſſe de la balle ; cette vîteſſe étant trouvée, on en tire la valeur de la corde L*l* de l'arc décrit par le pendule après le choc, & ſi la théorie eſt bonne (13), cette corde doit être exactement égale à celle que le ruban indique dans l'expérience. On verra par les Tables ſuivantes combien l'expérience s'écarte peu de la théorie.

N°.	Poids de la Poudre en dragmes.	Corde de l'arc décrit, meſurée ſur le ruban.	La même corde, ſuivant la théorie.	Erreurs de la théorie.
1	12	18,7	19,0	+ 0,3
2	12	19,6	19,0	− 0,6
3	6	13,6	13,4	− 0,2

Les expériences ſuivantes ont été faites avec le même canon ; mais le plateau du pendule étoit plus peſant que dans l'exemple de la huitieme Propoſition ; & la poudre ne rempliſſoit pas entiérement l'eſpace derriere la balle. C'eſt pourquoi, dans les Tables ſuivantes, on a particuliérement obſervé l'eſpace AF (fig. 1).

(13) C'eſt ici le cas de dire qu'il ne faut pas toujours juger de la bonté d'une théorie, par la conformité que l'on trouve entre ſes réſultats & ceux de l'expérience.

N°.	Espace AF. derriere la balle, (fig. 1.)	POIDS de la Poudre.	Corde de l'arc décrit, mesurée sur le ruban.	La même corde, suivant la théorie.	ERREUR de la théorie.
	pouces.	dragmes.	pouces.	pouces.	pouces.
4	2 $\frac{5}{8}$	6	11,9	12,1	+ 2
5	2 $\frac{5}{8}$	6	12,2	12,1	− 1
6	1 $\frac{1}{4}$	6	13,2	13,6	+ 4
7	1 $\frac{1}{4}$	6	13,9	13,6	− 3
8	2 $\frac{5}{8}$	12	16,7	17,2	+ 5
9	2 $\frac{5}{8}$	12	17,5	17,2	− 3
10	2 $\frac{5}{8}$	12	16,9	16,8	− 1
11	2 $\frac{5}{8}$	12	17,0	16,8	− 2
12	2 $\frac{5}{8}$	6	11,7	11,5	− 2
13	2 $\frac{5}{8}$	6	11,1	11,5	+ 4
14	2 $\frac{5}{8}$	12	16,7	16,3	− 4

Les cinq derniers nombres résultans de la théorie ont été corrigés, à cause d'un grand nombre de balles enfoncées dans le plateau, & dont le poids étoit d'environ 2 livres ; c'est pourquoi, le poids du pendule étant ainsi augmenté, il faut que l'étendue de la premiere vibration soit diminuée proportionnellement.

Dans les expériences suivantes, on s'est servi d'un canon de même calibre que le précédent, mais long seulement de 12,375 pouces. Pour distinguer ces deux canons, j'indiquerai le plus long par la lettre A, & l'autre par la lettre C. Le plateau du pendule étoit d'abord un peu plus léger que dans l'exemple de la huitieme Proposition.

Digitized by Google

N°.		Espace A F. (fig. 1.)	Poids de la Poudre.	Corde mesurée sur le ruban.	La même, suivant la théorie.	Erreur de la théorie.
		pouces.	dragmes.	pouces.	pouces.	pouces.
15	C	$2\frac{5}{8}$	12	12,7	12,8	+ 1
16	C	$2\frac{5}{8}$	12	12,6	12,8	+ 2
17	C	$2\frac{5}{8}$	12	12,4	12,8	+ 4
18	A	$2\frac{5}{8}$	12	17,0	17,3	+ 3
19	A	$2\frac{5}{8}$	12	17,2	17,2	0
20	A	$2\frac{5}{8}$	12	17,1	17,2	+ 1
21	A	$2\frac{5}{8}$	12	17,2	17,2	0
22	A	$2\frac{5}{8}$	6	12,4	12,2	− 2

Je me suis ensuite servi d'un troisieme canon, marqué B, de même calibre que les deux autres, & long de 24,312 Pouces; le plateau fixé sur le pendule étoit d'abord un peu plus pesant que celui de la huitieme Proposition; & comme dans le cours d'un grand nombre d'épreuves, son poids augmentoit sensiblement, nous y avons eu égard, en diminuant à proportion la corde trouvée par la théorie.

N°.		Espace A F. (fig. 1.)	Poids de la Poudre.	Corde mesurée par le ruban.	La même, suivant la théorie.	Erreur de la théorie.
		pouces.	dragmes.	pouces.	pouces.	pouces.
23	A	$2\frac{5}{8}$	12	17,1	17,2	+ 1
24	A	$2\frac{5}{8}$	9	15,2	15,0	− 2
25	A	$2\frac{5}{8}$	9	15,4	15,0	− 4
26	C	$2\frac{5}{8}$	12	11,5	12,8	+ 1,3
27	C	$2\frac{5}{8}$	12	11,5	12,8	+ 1,3
28	C	$2\frac{5}{8}$	6	8,7	9,0	+ 3
29	C	$2\frac{5}{8}$	12	12,3	12,5	+ 2
30	B	$2\frac{5}{8}$	12	14,4	14,4	0
31	B	$2\frac{5}{8}$	12	14,4	14,4	0
32	B	$2\frac{5}{8}$	6	10,3	10,5	+ 2
33	A	1 [illegible]/4	8	14,7	14,5	− 2
34	A	4	12	15,7	15,3	− 4

Les errenrs des 26e. & 27e. expériences étant beaucoup plus confidérables qu'aucune des autres, je foupçonne que cela provient de quelque méprife dans la pefée de la poudre, ou de ce que le canon ayant été expofé à l'humidité, en avoit un peu confervé. Cette circonftance, comme je l'ai fouvent obfervé, affoiblit fenfiblement la force de la poudre.

Les expériences fuivantes ont été faites avec un pendule beaucoup plus pefant : fon poids étoit de 97 livres ; la diftance du centre de gravité à l'axe, de 55,625 pouces ; & comme il faifoit 200 petites vibrations en 265 $\frac{1}{4}$ fecondes, la diftance du centre d'ofcillation à l'axe a dû être de 63,9 pouces. Je me fuis encore fervi d'un autre canon qui n'avoit que 7,09 pouces de longueur, & 0,83 de calibre, & dans lequel une balle de 33 $\frac{1}{2}$ dragmes étoit chaffée de force. Il eft défigné par la lettre D.

N°.		Efpace A F. (fig. 1.)	POIDS de la Poudre.	Corde mefurée fur le ruban.	La même, fuivant la théorie.	ERREUR de la théorie.
		pouces.	dragmes.	pouces.	pouces.	pouces.
35	A	2 $\frac{5}{8}$	12	9,2	9,2	0
36	A	2 $\frac{5}{8}$	12	9,5	9,2	−3
37	A	5 $\frac{1}{4}$	24	11,7	11,3	−4
38	A	7 $\frac{7}{8}$	36	13,2	12,6	−6
39	A	2 $\frac{5}{8}$	12	9,3	9,1	−2
40	A	1 $\frac{3}{4}$	8	7,6	8,1	+5
41	C	2 $\frac{4}{8}$	12	6,1	6,6	+5
42	C	2 [illegible]/8	12	6,5	6,6	+1
43	B	2 $\frac{4}{8}$	12	8,0	8,2	+2
44	B	2 $\frac{5}{8}$	12	8,3	8,2	−1
45	A	2 $\frac{5}{8}$	12	9,5	9,1	−4
46	A	2 $\frac{5}{8}$	12	9,1	9,1	0
47	A	2 $\frac{5}{8}$	6	7,2	6,5	−7
48	A	2 $\frac{5}{8}$	6	6,7	6,5	−2
49	C	2 $\frac{5}{8}$	12	6,8	6,7	−1
50	C	2 $\frac{5}{8}$	12	7,5	6,7	−8
51	C	2 $\frac{5}{8}$	6	4,7	4,8	+1

52	C	$2\frac{1}{8}$	6	5,0	4,8	− 2
53	D	$2\frac{1}{4}$	12	7,0	7,2	+ 2
54	D	$2\frac{5}{8}$	12	7,1	6,8	− 3
55	D	$2\frac{5}{8}$	6	4,7	4,8	+ 1
56	D	$2\frac{5}{8}$	6	4,8	4,8	0
57	A	$2\frac{1}{16}$	6	6,4	6,5	+ 1
58	A	$2\frac{1}{16}$	6	6,4	6,5	+ 1
5	A	$2\frac{1}{16}$	6	6,6	6,5	− 1
60	A	$2\frac{1}{16}$	6	6,7	6,5	− 2
61	A	$2\frac{1}{16}$	12	9,0	9,1	+ 1

L'erreur de la 50e. expérience a sans doute été occasionnée par le vent; car la 49e. qui la précede immédiatement, & pour laquelle on a employé la même quantité de poudre, differe très-peu de la théorie. L'excès de la 38e. sur la théorie provient en partie de l'impulsion de la flamme contre le pendule; la charge étant beaucoup plus forte dans cette expérience, devoit naturellement produire cet effet.

Cette théorie se confirme aussi par les expériences faites avec de très-petites charges de poudre. Nous avons admis jusqu'ici, que la chaleur de la poudre enflammée étoit égale à celle du fer chauffé au blanc; mais, comme nous l'avons observé, dans les petites charges la chaleur ne doit point avoir la même intensité. La force de la poudre est donc moindre dans ce cas qu'on ne l'a supposé; & cette diminution de force dans les petites charges, a été sensiblement remarquée par plusieurs expériences. Prenons pour terme de comparaison l'exemple de la septieme Proposition, où l'on a trouvé

K

environ 1670 pieds par ſeconde pour la vîteſſe de la balle, on aura la même vîteſſe par une moyenne priſe ſur toutes les vîteſſes trouvées par les expériences. Maintenant ſi avec le même canon & le même eſpace derriere la balle, on prend une dragme de poudre au lieu de 12, il ſuivroit des principes que nous avons établis, que ſi l'élaſticité étoit proportionnelle aux quantités de poudre, la vîteſſe d'une balle chaſſée par une petite charge, ſeroit à la vîteſſe que lui communique une plus forte charge, comme les racines des quantités de poudre qui compoſent ces charges; c'eſt-à-dire, dans notre exemple, comme 1 eſt à $\sqrt{12}$; & comme la vîteſſe communiquée par 12 dragmes eſt de 1670 pieds par ſeconde, il faudroit qu'une dragme en communiquât une de 482 pieds. Mais toutes les expériences que j'ai faites avec une dragme de poudre, & dont les réſultats ont très-peu varié, ne m'ont donné tout au plus, qu'une vîteſſe de 400 pieds par ſeconde. Il eſt donc clair que dans cette petite quantité de poudre, l'élaſticité eſt moindre que nous ne l'avons ſuppoſé dans notre théorie.

Pareillement, une charge de 3 dragmes de poudre devroit, ſelon notre théorie, produire une vîteſſe de 835 pieds par ſeconde; tandis que l'expérience ne la donne que de 720 à 740 pieds; on voit donc encore que, dans cette quantité de poudre, l'élaſticité n'eſt pas auſſi grande qu'elle devroit l'être par notre théorie.

Ces moindres degrés d'élaſticité de la poudre, lorſqu'il y en a peu d'allumée, ſont au degré d'élaſticité que notre théorie aſſigne à des charges plus fortes, comme les quarrés des vîteſſes im-

primées à la balle dans le même canon. Ainsi l'élasticité résultante de l'inflammation d'une dragme de poudre, est à celle que produit l'inflammation de 12 dragmes dans les mêmes circonstances, comme 2 est à 3 : & l'élasticité de 3 dragmes est à celle de 12, à peu près comme 3 est à 4 ; en supposant toutefois que cette diminution d'élasticité se fait uniformément dans toutes les parties de la poudre lors de son expansion ; mais il y a toute apparence que cela n'arrive point ainsi : car puisqu'une moindre élasticité provient d'un moindre degré de chaleur, il est plus vraisemblable que, dans l'inflammation d'une petite quantité de poudre, non-seulement la premiere chaleur est moindre, mais qu'elle décroit encore à mesure que la balle avance dans le canon (*) ; & qu'ainsi la poudre doit d'autant plus perdre de l'élasticité occasionnée par la chaleur, qu'elle agit plus long-temps sur la balle ; ce qui n'auroit pas lieu si les charges étoient bien proportionnées à la longueur des canons.

Scholie.

Notre théorie se trouve donc solidement établie & confirmée par les preuves les plus convaincantes ; par un parfait accord avec une suite nombreuse d'expériences faites dans toutes les différentes circonstances que la nature du sujet pouvoit présenter. Je dois même avertir

(*) Ce décroissement de chaleur a également lieu dans les grandes charges, & sert de fondement à la théorie donnée dans la note 8.

que la plupart de ces expériences ont été faites & enrégiſtrées, avant d'avoir fait aucun des calculs néceſſaires pour les comparer avec la théorie; quoique j'euſſe déjà découvert cette théorie, telle qu'on la trouve développée dans cet Ouvrage.

La diverſité de nos expériences, & la parfaite conformité de leurs réſultats avec ceux de la théorie ne doivent pas laiſſer le moindre doute ſur la vérité de cette théorie. Car nous avons examiné la force de la poudre, tant ſur des balles de différens diametres, que dans des canons de différentes longueurs, depuis 7 pouces juſqu'à 45; nous avons auſſi varié les charges de poudre, ſoit dans leurs poids depuis 6 juſqu'à 36 dragmes, ſoit dans la maniere de les diſpoſer dans le canon: tantôt elles rempliſſoient entiérement la cavité derriere la balle; tantôt elles n'en occupoient qu'une partie. Et dans toutes ces différentes circonſtances la théorie a donné exactement la vîteſſe de la balle. Enfin, ce n'eſt pas juſqu'aux exceptions à la regle générale que nous avons établie, telles qu'en préſentent de très-petites charges, qu'on ne puiſſe déduire de notre théorie. Il faut donc que cette théorie, puiſqu'elle s'accorde dans tous les cas avec l'expérience, ſoit néceſſairement fondée ſur la ſeule & véritable eſtimation de la force de la poudre; ſans quoi cette conformité n'auroit certainement pas lieu.

Nous avons fait voir, en établiſſant notre théorie, que les $\frac{3}{10}$ de la ſubſtance de la poudre ſe convertiſſoient par l'inflammation en une matiere ſubtile, fluide & permanente; donc l'élaſticité, eu égard à ſa chaleur & à ſa denſité,

étoit égale à celle de l'air dans les mêmes circonſtances. On ſuppoſe en outre que toute la force qui ſe manifeſte dans les effets prodigieux de la poudre, ne provient que de la force expanſive de ce fluide élaſtique : & ces principes, comme on a pu le voir, nous ont mis en état de déterminer la vîteſſe des projectiles, quelle que ſoit l'arme à feu dont ils ſont chaſſés, & ſuffiront dans toutes les occaſions où il s'agira de connoître la force de la poudre. Au reſte, que le fluide qui ſe développe par l'inflammation de la poudre, ſoit de l'air ordinaire ou non, c'eſt ce que nous n'examinerons point ici, cette recherche étant étrangere à notre objet.

On peut encore tirer de cette théorie pluſieurs conſéquences très-importantes dans la pratique de l'Artillerie. Il eſt aiſé, par exemple, de déterminer l'épaiſſeur que doit avoir une piece de canon, afin qu'elle puiſſe réſiſter à l'effort de la poudre, puiſque cet effort eſt facile à connoître. On voit auſſi combien ſe ſont trompés pluſieurs Auteurs modernes, lorſqu'ils ont cru pouvoir tirer un parti plus avantageux des canons & des mortiers, en donnant différentes formes à leurs chambres : leur opinion, à cet égard, ne pouvoit être fondée que ſur une fauſſe notion des effets de la poudre enflammée. Notre théorie nous apprend en outre que pour obtenir la même vîteſſe avec la même charge, il faut que le projectile ſoit à la même diſtance du fond du canon, car il ſuit de nos principes que la même quantité de poudre agit avec plus ou moins de force, ſelon que l'eſpace derriere la balle eſt plus petit ou plus grand. Pour connoître exactement la longueur

de cet espace, j'ai eu soin, dans toutes mes épreuves, de faire une marque sur le refouloir; c'est une attention qu'il faut sur-tout avoir lorsque le canon est tiré à une certaine élévation, & principalement quand on tire à ricochet.

La connoissance que nous avons de l'action continuée de la poudre, de la maniere dont elle se propage, & de la longueur d'un canon, conduit à éclaircir un des principaux points de l'Artillerie : tous les Praticiens conviennent qu'on ne peut compter sur la justesse du tir, qu'autant que la piece est posée sur un terrein ferme & inébranlable ; car si ce terrein est ébranlé par le premier effort de l'explosion, la direction de la piece en seroit dérangée, & le coup deviendroit incertain. Pour prévenir cet inconvénient, on a coutume de bien battre & affermir le terrein sur lequel le canon doit être placé, de maniere qu'il ne puisse être ébranlé, ni dans le premier instant de l'explosion, ni pendant la durée d'une grande partie du recul. Mais il est évident que, le boulet étant une fois hors du canon, l'ébranlement de la piece ou du terrein n'a plus d'influence sur son mouvement ; & il est aisé de faire voir par un calcul très-simple, que dans le cas d'une piece de 24, longue de 10 pieds & chargée de 16 livres de poudre, le boulet est hors de la piece avant qu'elle ait reculé d'un demi-pouce. Il suffit donc que le commencement du recul se fasse sur un fonds bien ferme & bien uni, & il importe peu que le reste du terrein soit préparé avec le même soin, puisqu'après un demi-pouce de recul le mouvement de la piece ne doit plus influer sur celui du boulet. En observant ce qui vient d'être

dit, on pourra s'épargner bien des peines inutiles dans la construction des plates-formés.

Cette théorie nous fait voir encore l'erreur de quelques Auteurs qui ont attribué la force de la poudre, ou du moins une assez grande partie de cette force, à l'air contenu dans les grains & dans leurs interstices. Ils pensent sans doute, car ils ne s'expliquent point assez clairement, que l'air s'y trouve dans son état naturel, & que l'accroissement de sa force ne vient que de la chaleur occasionnée par l'inflammation de la poudre. Mais il résulte de ce que nous avons dit, dans la cinquieme Proposition, de l'augmentation d'élasticité que la chaleur de l'inflammation pouvoit produire dans l'air, que cette élasticité n'en devenoit que cinq fois plus grande; ce qui ne feroit, tout au plus, que la 200e. partie de la force réelle de la poudre.

Après avoir établi notre théorie & en avoir fait voir toute l'exactitude, nous passerons à l'examen d'autres circonstances, qui, quoiqu'elles se déduisent naturellement de cette théorie, méritent néanmoins, par leur utilité & leur nouveauté, d'être traitées avec plus d'étendue.

Premiere Remarque.

L'Auteur compare dans cette Proposition les vîtesses calculées d'après sa théorie, avec celles qu'il a trouvées par le moyen de la machine dont il a donné la description; & cette comparaison présente en général une conformité entre les résultats des deux méthodes, beaucoup plus exacte qu'on ne devoit l'espérer d'une fausse théorie. Il est donc à propos de porter

un œil plus attentif sur les expériences de l'Auteur, & d'examiner les conséquences qu'il en a tirées, en suivant ce que nous avons déjà remarqué au sujet de la Proposition précédente. Nous avons fait voir que la regle employée par l'Auteur pour déterminer la vîtesse d'une balle par le moyen de la corde L*l* (fig. 5) mesurée sur le ruban, n'est point exacte, & ne peut avoir lieu que lorsque la balle frappe le pendule au centre d'oscillation. En effet, si l'on nomme P le poids du pendule ; *p* celui de la balle ; *a* la longueur totale DL du pendule ; *g* la distance DQ de son centre de gravité à l'axe ; *f* celle de son centre d'oscillation ; *b* la distance DV du point frappé V ; & *k* la corde de l'arc décrit par le point L, la vîtesse de la balle sera, suivant notre Auteur, exprimée par la formule $\frac{k}{a}\left(\frac{Pg}{pb}+\frac{b}{f}\right)\frac{f}{\sqrt{2b}}$; au lieu qu'elle devroit l'être par $\frac{k}{a}\left(\frac{Pg}{pb}+\frac{f+b}{2f}\right)\sqrt{\frac{f}{2}}$, ainsi que nous l'avons trouvé pour le cas où *p* est très-petit par rapport à *P*. Il est vrai que dans l'une & l'autre formule on n'a point eu égard à la résistance de l'air ; mais comme il n'en résulte qu'une très-petite différence, on peut la négliger. Au reste, la regle de l'Auteur peut quelquefois produire une différence très-sensible, comme il est arrivé dans l'exemple de la Proposition précédente, où la vîtesse trouvée par cette regle étoit trop petite de 43 pieds, ce qui fait environ le 40e. de la vîtesse totale. Cela vient de ce que, dans cette expérience, la balle a frappé le pendule au dessous du centre d'oscillation S, & plus la distance de ce centre au point frappé V est grande, plus la vîtesse trou-

vée par cette regle, s'écartera de la vérité. Puisque, dans chacune de ces formules, les quantités $\frac{b}{f}$ & $\frac{f+b}{2b}$ font très-petites par rapport à la quantité $\frac{Pg}{pb}$, on pourra toujours dire que la vîtesse trouvée par l'Auteur est à la véritable, comme $\sqrt{f}$ est à $\sqrt{b}$; ensorte que l'erreur sera d'autant plus grande, qu'il y aura une plus grande différence entre b & f. Et comme, d'après l'exposé des expériences de l'Auteur, il a tiré un assez grand nombre de coups dans le même plateau, il est probable que deux balles n'ont point donné au même point, & que la différence entre f & b a été, tantôt plus grande, tantôt plus petite. Dans le cas présent, on a $f = 62\frac{2}{3}$, & la longueur totale du pendule $= 71\frac{1}{8}$. Donc, si l'une des épreuves eût donné $b = 69$, comme cela peut aisément arriver, la vîtesse trouvée par la regle de l'Auteur eût été à la véritable, comme $\sqrt{62\frac{2}{3}}$ est à $\sqrt{69}$, ou à peu près comme 20 à 21, c'est-à-dire, d'un vingtieme trop petite. Si le centre de gravité du pendule eût été placé vers le milieu du plateau, sa distance à l'axe étant de 52 pouces, il est à présumer que des balles auroient pu l'atteindre, & donner même plus haut, par exemple, à 45 pouces de l'axe; alors la vîtesse trouvée par la regle de l'Auteur eût été trop grande, & dans le cas de $DV = 45$, cette vîtesse seroit à la véritable comme $\sqrt{62\frac{2}{3}}$ est à $\sqrt{45}$, ou comme 13 à 11, c'est-à-dire, de plus d'un sixieme trop grande.

Mais comme, dans toutes ces expériences, l'Auteur n'a point indiqué à quelle distance de l'axe la balle a frappé le pendule, il n'est pas

poſſible d'aſſigner l'erreur qu'on a pu commettre dans chacune. Lorſque la vîteſſe trouvée eſt d'environ 1700 pieds par ſeconde, il peut ſe faire que dans certain cas elle ſoit de 85 pieds trop petite, & dans d'autres de 283 pieds trop grande ; ou bien, comme l'Auteur n'a point indiqué la vîteſſe elle-même, mais ſeulement la longueur de la corde $Ll = k$, qui lui eſt proportionnelle ; il peut arriver que cette corde étant de 16 pouces, l'erreur dans ſa meſure ait été de 0,8 pouces, lorſqu'on a tiré au bas du pendule ; & juſqu'à 2,6 pouces, lorſque la balle a donné dans la partie ſupérieure du plateau. Tout cela eſt trop incertain pour que, de l'accord de l'expérience avec la théorie, on puiſſe rien conclure en faveur de cette derniere.

Il ne paroît pas non plus par l'expoſé de ces expériences, que l'Auteur ait été bien attentif à meſurer la diſtance $DV = b$; car il y en a pluſieurs qui, avec la même charge & le même canon, indiquent la même longueur pour la corde $Ll = k$; quoiqu'il ne ſoit pas vraiſemblable que dans toutes ces expériences la balle ait conſtamment frappé le pendule à la même hauteur. Et quand même il ſeroit poſſible de tirer toujours au même point, on ne l'auroit point fait, dans la crainte qu'une balle vînt à en rencontrer une autre. Il a donc fallu tirer à deſſein ſur différens points du plateau ; & comme le diametre de la balle étoit de $\frac{3}{4}$ de pouce, ces points devoient être éloignés l'un de l'autre au moins d'un pouce. Il n'eſt pas dit non plus, & cela ne ſeroit guere poſſible, que toutes les balles aient donné dans une même ligne horizontale,

ou à une même diſtance de l'axe. Or il ne faut tirer qu'un pouce plus haut ou plus bas, pour qu'il en réſulte une erreur de 0,1 de pouce à la longueur de la corde Ll, lorſqu'elle a plus de 10 pouces de longueur. Une différence de deux pouces produiroit une erreur de 0,2 po. dans la corde ; une différence de 3 pouces en produiroit une de 0,3, & ainſi des autres. Ces erreurs ne peuvent venir que du peu d'exactitude de la théorie qui ſert de fondement à la regle donnée par l'Auteur : fût-elle même juſte cette théorie, on ne ſeroit pas diſpenſé de meſurer avec le plus grand ſoin la diſtance DV $= b$. Car la vîteſſe étant, ſelon l'Auteur, à peu près comme $\frac{k}{a} \times \frac{Pfg}{pb\sqrt{2b}}$, ou, toutes choſes égales d'ailleurs, comme $\frac{1}{b\sqrt{b}}$, on voit bien qu'une petite différence dans la diſtance b, ne doit point être négligée. Suppoſons que b étant de 66 pouces, on ait trouvé la corde $k = 16$; ſi, dans les mêmes circonſtances, la quantité b étoit ſeulement d'un pouce plus grande ou plus petite, la corde k deviendroit déjà d'un $\frac{1}{3}$ de pouce plus grande ou plus petite. Or nous ne voyons pas que cette corde ait ainſi varié dans les différentes expériences faites avec la même charge & le même canon : il faut donc néceſſairement, ou que les coups aient tous porté ſur la même ligne horizontale, ou que l'Auteur ait négligé dans ſes calculs, de faire attention aux différentes diſtances du point V à l'axe. La premiere ſuppoſition n'étant pas vraiſemblable, on eſt forcé d'admettre la ſeconde. Suppoſons néanmoins, à l'avantage de ces expériences, que quoique les balles n'aient pas toutes

frappé le pendule sur une même ligne horizontale, la différence des hauteurs n'aient pas été de plus d'un pouce; encore auroit-on dû y avoir égard, puisqu'il en devoit résulter une différence d'un tiers de pouce dans la longueur de la corde *k*; cet objet étant bien plus important que l'augmentation du poids du pendule occasionnée par les balles enfoncées dans le plateau à laquelle on a fait attention, en diminuant en conséquence la longueur de la corde.

La description de l'instrument dont l'Auteur s'est servi, présente une circonstance d'où l'on peut tirer quelqu'éclaircissement : l'Auteur en établissant la regle qu'il donne pour déterminer la vîtesse de la balle, appelle le point où elle doit frapper le pendule, point du milieu, centre du plateau; & d'après cela il fait son calcul de maniere que, par une simple regle de trois, il trouve la vîtesse de la balle pour tout autre cas. Il trouve, par exemple, que cette vîtesse est de 1641 pieds par seconde, lorsque la longueur de la corde mesurée sur le ruban, se trouve de $17\frac{1}{4}$ pouces; de là il détermine, pour un autre cas, la vîtesse qu'auroit une balle de même pesanteur, en disant $17\frac{1}{4}$ pouces est à la longueur de la corde trouvée par une autre expérience, comme 1641 est à la vîtesse résultante de cette expérience. Il paroît que l'Auteur s'est constamment servi de cette regle, après avoir calculé, pour un seul cas, la vîtesse de la balle d'après ses principes. S'il en est ainsi, il doit y avoir une double erreur dans la plupart de ses calculs. Premiérement, le nombre 1641 est trop petit, comme nous l'avons fait voir, & doit être remplacé par 1675. En second

lieu, il n'eſt pas poſſible d'admettre la condition, que tous les coups ont porté au milieu du plateau, ou à 66 pouces de l'axe. Car la derniere des expériences fait voir qu'on a tiré 27 balles dans le même plateau ; & comme elles devoient être éloignées l'une de l'autre au moins d'un pouce, & que le plateau n'avoit guere plus d'un pied de largeur, il n'eſt pas poſſible qu'elles aient toutes donné dans une même ligne horizontale ; il y en a donc qui ont frappé au moins un pouce plus haut ou plus bas ; il eſt même à préſumer que cette différence a été juſqu'à 2 & 3 pouces & plus, ce qui a dû quelquefois faire une erreur d'un pouce entier ſur la longueur de la corde. Nous trouvons ici une indication de l'étendue du plateau, dans la diſtance de ſon milieu à l'axe, que l'on a dit être de 66 pouces : le bord inférieur du pendule étant éloigné du même axe de 71 $\frac{1}{8}$ pouces, il s'enſuit que de ce bord au milieu du plateau, il y a environ 5 pouces, ce qui fait 10 pouces pour la hauteur de ce plateau, & pour ſa ſurface, environ un pied quarré, & non pas 4, comme nous l'avions ſuppoſé dans le calcul de la réſiſtance de l'air. Cette réſiſtance a donc été trouvée quadruple de ce qu'elle doit être; & comme, dans ce cas, elle diminueroit la viteſſe de la balle de 4 pieds, il s'enſuit que la réſiſtance de l'air n'influe réellement que pour un pied ſur cette vîteſſe, & qu'on peut par conſéquent négliger d'y avoir égard dans les expériences. Il ſuit encore que les balles ne pouvant frapper le plateau à plus de 5 pouces plus haut ou plus bas que ſon milieu, la vîteſſe trouvée par la regle de l'Auteur, ne peut

différer de la vîtesse réelle, que d'environ sa vingtieme partie.

L'Auteur a aussi eu égard, dans la suite de ses expériences, au poids des balles enfoncées dans le plateau; cette circonstance, quoiqu'on ne doive pas la négliger, est d'une bien moindre conséquence que celle dont nous venons de parler. Ces balles augmentent le poids du pendule; & comme elles sont toutes placées bien au dessous de son centre de gravité, ce centre, ainsi que celui d'oscillation, n'ont plus la même position. Supposant donc que la vîtesse de la balle soit due à la hauteur h, nous avons trouvé, lorsqu'il n'y avoit point encore de balle dans le plateau, $k = \frac{pab\sqrt{2h}}{\sqrt{(Pg+pb)(Pfg+pbb)}}$. Supposons maintenant que le poids des balles actuellement enfoncées dans le plateau à la distance b de l'axe, soit exprimée par q, au lieu de Pg, qui est le moment du poids, il faudra mettre $Pg + qb$; & au lieu de Pfg, qui est le moment d'inertie, on mettra $Pfg + qbb$, ce qui donne $k = \frac{pab\sqrt{2h}}{\sqrt{(Pg+pb+qb)(Pfg+pbb+qbb)}}$. Ainsi la corde, dans le premier cas, sera à celle-ci, comme $\sqrt{\frac{(Pg+bp)(Pfg+pbb)}{(Pg+pb+qb)(Pfg+pbb+qbb)}}$ est à 1, ou à peu près comme $1 + \frac{qb(f+b)}{2Pfg}$ à 1, lorsque P est très-grand par rapport à p. Si l'on a donc, comme dans l'exemple proposé, $P = 56$ ℔; $f = 62\frac{2}{3}$; $g = 52$; $b = 66$, & le poids des balles dans le plateau $= 1$, alors la corde du premier cas sera à celle du second, les autres circonstances étant les mêmes, comme $1 + \frac{1}{43}$ est à 1; c'est-à-dire qu'à cause de ces

Digitized by Google

balles, la corde doit être diminuée de sa quarante-quatrieme partie : & c'est ce que l'Auteur a très-bien observé.

Seconde Remarque.

La corde $Ll = k$ ne peut être connue par la théorie, que lorsque la vîtesse avec laquelle la balle frappe le pendule, est déjà déterminée ; car si cette vîtesse est due à cette hauteur $= h$, on aura $k = \frac{pab\sqrt{2h}}{\sqrt{(Pg+pb)(Pfg+pbb)}}$, laquelle valeur, ainsi qu'il a été dit, peut, dans certains cas, être fort différente de celle que l'Auteur a trouvée par sa regle. Mais, par la premiere de ses deux méthodes, il détermine la vîtesse de la balle, ou la hauteur h, en considérant la charge de poudre, la longueur du canon, & l'espace derriere la balle ; sur quoi nous avons déjà fait plusieurs observations. Soit donc, pour éviter toute équivoque dans les expressions, la longueur du canon $= \alpha$; celle de l'espace derriere la balle $= \beta$; l'espace qu'occupe la poudre $= \gamma$; le diametre de la balle $= c$; & n le rapport des pesanteurs spécifiques de la matiere de la balle & de l'eau, on aura en pieds de Rhin $h = \frac{110524,08\gamma}{nc} \, l \, \frac{\alpha}{\beta}$, où $l \, \frac{\alpha}{\beta}$ représente le logarithme ordinaire de la fraction $\frac{\alpha}{\beta}$. Si l'on veut avoir cette valeur exprimée en pouces anglois, comme l'Auteur l'a pratiqué, on trouvera, à cause de 0,97 pieds de Rhin = 12 pouces anglois, $h = \frac{1367308\gamma}{nc} \, l \, \frac{\alpha}{\beta}$ pouces anglois, & $2h = \frac{2734616\gamma}{nc} \, l \, \frac{\alpha}{\beta}$; donc $\sqrt{2h} = 1654 \sqrt{}$

$\frac{\gamma}{nc} \, l \, \frac{\alpha}{\beta}$, d'où l'on tire enfin $k = 1654 \, pab$ $\sqrt{\frac{\gamma \, l \frac{\alpha}{\beta}}{nc(Pg + pb)(Pfg + pbb)}}$, abstraction faite de la résistance de l'air au mouvement du pendule, & à celui de la balle, pendant qu'elle avance dans le canon. Mais, dans le calcul de cette formule, nous avons supposé avec l'Auteur que l'inflammation de la poudre est instantanée, & que l'élasticité de la matiere subtile qui se développe par l'explosion, pendant qu'elle est encore renfermée dans l'espace qu'occupe la charge, est 1000 fois plus grande que celle de l'air dans son état naturel, ou, ce qui revient au même, 1000 fois plus grande que la pression de l'athmosphere. Or, il a été démontré assez clairement qu'il n'étoit pas possible d'admettre la premiere de ces deux conditions, & qu'il falloit par conséquent que la force élastique de cette matiere subtile, pour produire le même effet, fût beaucoup plus que 1000 fois aussi grande que la pression de l'athmosphere. Quant à l'accord qui se trouve entre les expériences & la théorie de l'Auteur, quoiqu'il y ait bien à redire au calcul des longueurs de la corde Ll, qu'il compare avec les longueurs observées; il peut se faire néanmoins que les vitesses trouvées par la théorie, ne s'écartent pas beaucoup de la vérité; mais ce n'est point par cette conformité que l'on en doit juger, elle n'est qu'apparente & illusoire, puisqu'il s'en faut souvent d'un pouce entier que les cordes calculées ne soient exactes. Mais quand même les vitesses déduites du calcul seroient entiérement conformes à la vérité, cela ne confirmeroit pas encore l'opinion

Digitized by Google

l'opinion de l'Auteur touchant la force de la poudre : la même vîteſſe pourroit être communiquée par une force beaucoup plus conſidérable, dont l'action ne feroit point inſtantanée, & qui agiroit par des impulſions ſucceſſives. Il eſt vrai que, pour appuyer cette opinion, l'Auteur rapporte des expériences faites ſur des canons de différentes longueurs, dont les réſultats s'accordent avec ſa théorie ; ce qui n'arriveroit point, ſelont lui, ſi l'inflammation de la poudre étoit ſucceſſive, parce qu'il s'en enflammeroit une moindre quantité dans un canon plus court, avant le départ de la balle, que dans un plus long. Mais nous croyons avoir ſuffiſamment répondu à ces objections, auxquelles nous avons d'ailleurs oppoſé des expériences qui prouvent abſolument le contraire. Nous ajouterons ſeulement qu'il eſt poſſible que la qualité de la poudre employée par l'auteur fût telle, que la plus grande partie de la charge ſe ſoit enflammée avant que la balle ait été chaſſée hors du canon le plus court ; que les cordes calculées d'après un faux principe, peuvent très-bien s'accorder avec l'expérience, tandis qu'on ne pourroit pas s'en promettre autant d'un calcul fondé ſur la meilleure théorie ; enfin, que ce qui s'échappe du fluide élaſtique par la lumiere & le vent de la balle, peut contribuer à cet accord avec l'expérience, comme nous l'avons fait obſerver dans les remarques précédentes. On voit donc que, quoique la force de la poudre, au premier inſtant de l'inflammation, ſoit beaucoup plus grande que l'Auteur ne l'a admiſe, elle ne fait cependant pas plus d'effet dans certains cas, qu'il n'en réſulte des calculs de l'Auteur, & que,

L

par conséquent, l'inflammation successive de la poudre, & les autres accidens dont nous avons parlé, diminuent la vîtesse du projectile d'autant, à peu près, qu'elle seroit augmentée par une plus grande force primitive. Toutes les fois donc que cette compensation aura lieu, l'on pourra avec assurance se servir de la regle de l'Auteur, pour déterminer la vîtesse d'une balle en considérant la charge de poudre. Mais il peut y avoir des cas où la prépondérance reste du côté de la plus grande force dans la poudre, ou du côté des obstacles mentionnés ci-dessus : alors la vîtesse résultante de la regle de l'Auteur sera, ou trop grande, ou trop petite. Un de ces cas arrive, lorsque la charge est trop foible; alors, comme l'Auteur l'a très-bien observé, la chaleur qui accompagne l'inflammation, & par conséquent l'élasticité du fluide, n'est point aussi grande qu'on l'a supposée dans le calcul de la formule, où l'on a supposé $m = 1000$; cette valeur, qui convient aux fortes charges, doit être diminuée pour les foibles. Soit donc μ la juste valeur de m dans les petites charges, la quantité μ pourra toujours se déduire de la différence entre la longueur de la corde trouvée par le calcul, & celle qu'on aura observée dans l'expérience; car dans le cas de $m = 1000$, on a la corde $k = 1654$ $pab \sqrt{\frac{\gamma l \frac{\alpha}{\beta}}{nc(Pg+pb)(Pfg+pbb)}}$; donc quand m n'est point égal à 1000, mais à μ, cette corde sera $= 1654\, pab \sqrt{\frac{\mu \gamma l \frac{\alpha}{\beta}}{1000\, nc(Pg+pb)(Pfg+pbb)}}$, toutes choses d'ailleurs étant égales. Il suit de

là que, dans le cas des petites charges, la corde calculée est à la corde observée, comme $\sqrt{1000}$ est à $\sqrt{\mu}$; donc 1000 est à μ, comme le quarré de la corde calculée est au quarré de la corde observée, ou comme les quarrés des vitesses. Dans l'exemple rapporté par l'Auteur, où la charge n'étoit que d'une dragme de poudre, la vitesse résultante du calcul devoit être de 482 pieds par seconde, tandis qu'on ne l'a trouvée que de 400 pieds par l'expérience; on a donc, dans ce cas, $1000 : \mu :: \overline{482}^2 : \overline{400}^2$, & $\mu = \frac{160000000}{482 \times 482} = 688$; c'est-à-dire que la chaleur produite par l'inflammation d'une dragme de poudre, est d'une moindre intensité que celle qui résulte d'une forte charge, au point qu'elle ne rend l'élasticité que 688 fois plus grande que la pression de l'athmosphere. Dans l'autre expérience, où la charge étoit de trois dragmes, on trouve $1000 : \mu :: \overline{835}^2 : \overline{730}^2$; donc $\mu = \frac{532900000}{835 \times 835} = 764$; ainsi, dans ce cas, l'élasticité de la poudre n'est, à cause du moindre degré de chaleur, que 764 fois plus grande que le poids de l'athmosphere. D'après ce principe, l'Auteur trouve que, pour le premier cas, le rapport de l'élasticité résultante des charges de 1 & de 12 dragmes, est celui de 2 à 3, ce qui s'accorde assez bien avec le rapport de 688 à 1000, que nous venons de trouver. Dans le second cas, il trouve le rapport de 3 à 4, & nous celui de 764 à 1000, qui en approche beaucoup. Or, comme il y a une différence assez sensible entre les nombres 688, 764 & 1000, qui expriment le rapport des élasticités provenantes de 1, 3 & 12 drag. de poudre,

on a lieu d'être surpris qu'une pareille gradation ne se montre point dans les charges depuis 6 jusqu'à 36 dragmes, & que les effets de ces charges, quoique très-différentes l'une de l'autre, s'accordent si bien avec le calcul. Cela vient peut-être du défaut d'exactitude que nous avons fait appercevoir dans la maniere de calculer la corde de la premiere oscillation du pendule : car puisque la chaleur de la flamme, ainsi que l'Auteur l'a prouvé, est d'autant plus vive qu'il s'allume à la fois une plus grande quantité de poudre, il est à présumer qu'avec une charge de 36 dragmes, on doit obtenir une élasticité sensiblement plus grande qu'avec 6 dragmes, & que cette élasticité est beaucoup plus considérable encore dans le gros canon, où les charges sont incomparablement plus fortes. Il y a donc toute apparence que la regle donnée par l'Auteur pour déterminer la vîtesse d'une balle de mousquet, par la considération de la force de la poudre, ne s'accordera plus si bien avec l'expérience, lorsqu'on voudra l'appliquer au gros canon, à moins que l'on n'ait égard en même temps aux autres circonstances, qui, comme nous avons vu, concourent à affoiblir la force impulsive de la poudre. Mais l'on ne peut rien dire encore de bien certain à ce sujet, parce que les cordes calculées par l'Auteur peuvent être fautives, & que l'on n'a point assez réfléchi sur les circonstances qui seroient propres à les corriger. Il seroit donc à desirer que les expériences de l'Auteur fussent répétées, & qu'en suivant sa méthode, on eût sur-tout l'attention de mesurer exactement la distance de l'axe au point où la balle aura

frappé le pendule : on calculeroit enſuite la longueur de la corde L*l*, d'après les vrais principes que nous avons indiqués plus haut.

TROISIEME REMARQUE.

Une connoiſſance parfaite de la force de la poudre & de la vîteſſe qu'elle imprime aux boulets, feroit ſans doute du plus grand avantage, pour perfectionner la théorie & la pratique de l'Artillerie. Si l'on avoit ſur ces deux points des lumieres certaines, on ſauroit à quoi s'en tenir ſur la force & la ſolidité qu'il convient de donner aux canons, aux mortiers & aux attirails des bouches à feu; on éviteroit l'inconvénient, ou de les ſurcharger de métal, ce qui entraîne une dépenſe inutile, ou de les faire trop foibles, ce qui expoſe aux accidens les plus fâcheux.

La force qui chaſſe le boulet hors de la piece agit également contre les parois de l'ame; & ſi le canon n'eſt point aſſez fort pour réſiſter à cette action, il faudra néceſſairement qu'il creve. C'eſt au premier inſtant de l'inflammation de la poudre, avant que le boulet ſoit ſenſiblement ébranlé, que la piece a le plus grand effort à ſoutenir; cet effort ſe fait donc dans l'eſpace CDEG (fig. 1.) où les parois du canon ſont preſſées avec la même force que le feroit la baſe d'une colonne d'eau de 32000 pieds de hauteur verticale, en ſuppoſant avec l'Auteur que l'élaſticité du fluide produit par l'inflammation de la poudre eſt, au premier inſtant de l'exploſion, 1000 fois plus grande que la preſſion de l'athmoſphere, laquelle eſt équivalente

au poids d'une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur. Mais cette force prodigieuse ne s'étend point sur tout le canon; ce n'est que la partie CDEG occupée par la charge de poudre, & sur laquelle cette force s'exerce, qui doit être capable de lui résister. Les autres parties ne sont pressées qu'à mesure que le boulet y parvient successivement, ensorte qu'elles ont un moindre effort à supporter que les premieres. Lorsque le boulet est parvenu en M, la force élastique dans l'espace AM est à la premiere dans AF, comme AF est à AM; elle est donc égale au poids d'une colonne d'eau qui auroit 32000 $\frac{AF}{AM}$ pieds de hauteur; d'où il suit que l'effort qui s'exerce contre les parties antérieures du canon, va toujours en décroissant. Il seroit donc superflu qu'une piece fût aussi forte du côté de la bouche qu'à la culasse. Mais pour savoir plus positivement quelle doit être l'épaisseur d'un canon à chaque endroit de sa longueur, pour qu'il ne soit, ni trop fort, ni trop foible, nous devons examiner par quel moyen il résiste à l'effort de la poudre. Si le métal du canon n'avoit point cette solidité, qui résulte de la cohésion de ses parties, le premier effort de la poudre romproit leur liaison, & les disperseroit de tous côtés. C'est donc par une forte cohésion de ses parties, que le métal résiste à cet effort. Mais il n'est pas possible de soumettre la force de cette cohésion au calcul, parce qu'il arrive souvent que, dans la fonte, les parties du métal sont plus rapprochées, & plus fortement liées dans certains endroits que dans d'autres; d'où résulte une résistance plus grande que ne le suppose une

Google

théorie fondée ſur une cohéſion uniforme dans toutes les parties du métal. Néanmoins, il ne ſera pas inutile de ſe former une idée de cette liaiſon mutuelle entre les parties du métal, & de la réſiſtance qu'elle oppoſe aux efforts de la poudre, quoique cette matiere ne ſoit pas ſuſceptible d'une préciſion bien exacte. Nous conſidérerons à cet effet une ſection du canon faite perpendiculairement à ſon axe (figure 8.) : le cercle ABQP repréſente l'ame de la piece, & la couronne APQERS le métal; à l'endroit où ſe fait l'exploſion de la poudre, la poudre agit également ſur toutes les parties de la circonférence intérieure ABQP, qu'elle tend à élargir, & même à rompre. Ne conſidérons d'abord qu'une portion AEFB du métal, terminée par deux rayons CE, CF; & ſoit le rayon intérieur $AC = BC = a$, l'angle $ACB = 2z$; l'arc AB ſur lequel la poudre agit, ſera $= 2az$, & il eſt proportionnel à la force que nous nommerons $2maz$. La direction moyenne de cette force paſſe par le centre C, & diviſe l'angle ABC en deux également. Soit CDM cette direction, ſuivant laquelle la portion AEFB eſt pouſſée par la force $2maz$, de maniere que ſi cette portion n'étoit pas étroitement liée avec le reſte du métal, elle ſeroit emportée ſuivant la direction DM; or, cette portion tient au reſte du métal par les lignes AE, BF; & comme la cohéſion eſt la même dans tous les points, on pourra la conſidérer comme l'effet d'une force qui preſſe la portion AEFB de part & d'autre contre le métal contigu, & qui lui eſt appliquée en G & H, milieu des lignes AE, BF, ſuivant les directions perpendiculai-

res à ces mêmes lignes. Nommant donc l'épaisseur du métal AE = BF = *b*, la force de cohésion sera de chaque côté proportionnelle à l'épaisseur *b*, & nous la nommerons *nb*. Si l'on prolonge les directions GI, HK jusqu'à leur rencontre en D sur la ligne CM, on pourra regarder ce point comme étant tiré par trois puissances, l'une = $2maz$ dirigée suivant DM, & les deux autres égales chacune à *nb*, suivant DI & DK; & ces deux puissances, pour détruire ou contrebalancer la premiere, doivent la surpasser, ou lui être égales. Décomposons maintenant chacune de ces deux puissances en deux autres, dont l'une DL soit dirigée suivant DM, & l'autre K, perpendiculairement à DM: les triangles CDH, DKL ayant l'angle D commun, & les angles en H & L droits, sont semblables, & donnent DK : DL :: CD : DH, ou comme le sinus total 1 est au sinus de l'angle DCH, *sin* z. Donc chacune de ces deux puissances agit suivant la direction DC avec une force = $2nb \sin z$, qui doit être plus grande que la force $2maz$, ou lui être égale, pour que le métal puisse résister à l'effort de la poudre, c'est-à-dire, qu'on doit avoir $nb \sin z > maz$, quelle que soit la grandeur de l'angle ACB. Mais le rapport de $nb \sin z$ à maz est le plus petit, quand l'angle ACB est de 180 degrés, ou bien $z = 90$; & comme, dans ce cas, on a $\sin z = 1$ & $z = 1,570796$, il faut que *nb* soit plus grande que $1,570796\, ma$. D'où l'on voit que la force dilaniatrice est la plus grande, lorsque la portion AEFB devient égale au demi-contour du canon, & que c'est en deux endroits diamétralement opposés, que le canon

eſt le plus ſujet à crever : mais pour qu'il réſiſte, il faut que *nb* ſoit plus grand que 1,570796 *ma*, ou que $\frac{11}{7}$ *ma*. Dans ces expreſſions, la lettre *m* ſera déterminée par la force expanſive de la poudre, & *n* par la tenacité du métal. Si l'on emploie le même métal pour pluſieurs canons, il faudra que les épaiſſeurs ſoient en raiſon des calibres, ou des diametres des boulets : & comme la force élaſtique de la poudre diminue à meſure que le boulet avance dans le canon, il faut que l'épaiſſeur du métal à un endroit quelconque M (fig. 1.) ſoit à ſon épaiſſeur près de la culaſſe, comme AF eſt à AM. On pourroit donc, ſur ce fondement, faire des canons beaucoup plus foibles de métal à la bouche qu'on ne le fait ordinairement, ſi, comme l'Auteur le prétend, toute la poudre d'une charge s'allumoit à la fois dans le même inſtant. Car, dans ce cas, ſi AM eſt double de AF, l'épaiſſeur du métal en M ne ſera que moitié de l'épaiſſeur en F, bien entendu que l'on auroit égard à la plus forte charge qu'on pourroit employer. Mais ſi l'on admet que la poudre ne s'allume pas toute dans le même inſtant, alors, à cauſe de la nouvelle inflammation qui ſe fait en M, le rapport de la force de la poudre en M, à celle qu'elle avoit en F, ſera plus grand que le rapport de AF à AM; d'où réſulte une plus grande épaiſſeur de métal vers la bouche du canon, que par la regle précédente : cela s'accorde avec l'expérience, & confirme en même temps l'opinion où nous ſommes que l'inflammation de la poudre n'eſt point inſtantanée. Mais comme on ne peut pas connoître la loi ſuivant laquelle

se fait successivement cette inflammation, & qu'elle doit varier suivant les différentes qualités de la poudre, il n'est pas possible, par la simple théorie, de déterminer l'épaisseur la plus avantageuse qu'on puisse donner au métal du canon; l'expérience est le seul guide à suivre dans cette recherche. Si l'on vouloit au contraire se conformer à la théorie de l'Auteur, rien ne seroit plus aisé que de fixer les différentes épaisseurs de métal d'un canon, mais il ne résisteroit pas long-temps à l'effort de la poudre, puisqu'il seroit, à coup sûr, beaucoup trop foible du côté de la bouche, quand même la culasse auroit toute la force nécessaire. Ces principes ne fournissant donc aucun moyen de diminuer le poids des canons, sans qu'il en résulte quelque inconvénient, il seroit plus à propos de tourner ses vues du côté de la matiere même qui entre dans la fabrication du canon, & de chercher à la perfectionner. Le plus avantageux seroit sans doute d'en trouver une dont les parties auroient entre elles une cohésion plus forte & plus intime que dans le métal ordinaire. Peut-être aussi y a-t-il dans l'art de fondre les canons plusieurs découvertes à faire, pour procurer une plus grande solidité au métal; telle est, par exemple, la méthode récemment inventée, de couler les canons d'abord massifs, & de ne les forer qu'après la fonte. Il en résulte ce double avantage, que la matiere du métal est plus dense, & qu'on est en état de forer l'ame suivant l'axe de la piece, avec plus de justesse que cela n'est praticable en coulant à noyau. Enfin, un peu de souplesse dans la matiere des canons, ne peut produire qu'un

bon effet, car il ne s'agit pas ſeulement ici de la ſolidité, qui ne dépend que de l'étroite union des parties d'un corps, & qui ſe trouve dans un métal aigre & caſſant, auſſi bien que dans un métal doux, mais de cette propriété par laquelle certains corps, lorſque leurs parties commencent à ſe déſunir, ſe rompent tout-à-fait, ou ſe rétabliſſent dans leur premier état. C'eſt-là ce qui conſtitue la différence entre les corps aigres & caſſans, & ceux qui ſont doux & flexibles : les premiers ſe rompent dès qu'il arrive le moindre dérangement à leurs parties; dans les autres, au contraire, les parties peuvent être dérangées, ſans que pour cela le lien de leur cohéſion ſoit briſé. Si l'on employoit donc pour les canons une matiere plus douce, plus flexible, & par conſéquent plus élaſtique, il n'y auroit point de danger à diminuer leurs dimenſions, & à les faire plus légers. C'eſt par cette raiſon qu'on a rendu autrefois des canons de cuir capables de réſiſter à des charges preſque auſſi fortes que celles qu'on emploie dans des canons de métal : ils étoient, à la vérité, moins durables, mais incomparablement plus légers. Au reſte, tout ce qu'il y a à conclure de ce que nous venons de dire, c'eſt que, relativement à la matiere des canons, il y a encore bien des choſes à deſirer pour la perfection de l'Artillerie.

La force expanſive de la poudre eſt auſſi la cauſe du recul des bouches à feu; car cette force tend à pouſſer le canon en arriere, comme elle chaſſe le boulet en avant, de maniere que ſi le canon n'étoit pas plus peſant que le boulet, la poudre leur communiqueroit à l'un & à

l'autre la même viteſſe. Mais plus un corps eſt peſant, moins il reçoit de vîteſſe de la même force; donc la vîteſſe du recul d'un canon eſt autant de fois plus petite que celle du boulet, que le poids du canon, y compris ſon affut, eſt plus grand que le poids du boulet; d'où il ſuit que la quantité du recul, pendant que le boulet parcourt l'ame de la piece, eſt à la longueur de l'ame moins l'eſpace derriere le boulet, réciproquement comme le poids du boulet eſt au poids du canon & de l'affut pris enſemble. Ainſi, une piece de 24 ayant 10 pieds de longueur, & peſant environ 6400 livres, ne reculera que de $\frac{24}{6400} \times 10$ pieds, ou $\frac{3}{80}$, c'eſt-à-dire, moins d'un demi-pouce, pendant que le boulet parcourt la longueur du canon. Le recul n'empêchera donc pas de tirer juſte, ſi le terrein eſt affermi de maniere que le canon puiſſe reculer d'un demi-pouce ſeulement, ſans être ébranlé, quand même il n'auroit pas la même ſolidité au-delà de ce terme. Si le canon continue de reculer après le départ du boulet, & par conſéquent après que la force impulſive a ceſſé d'agir, cela vient du mouvement qui lui a été imprimé, & qui doit continuer juſqu'à ce que la réſiſtance des frottemens l'ait entiérement détruit. Il ſuit de là, que la remarque de l'Auteur au ſujet des plates-formes, eſt très-juſte, & qu'on peut s'épargner bien des peines inutiles dans leur conſtruction.

QUATRIEME REMARQUE.

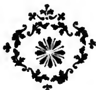
L'Auteur conclut encore de ſa théorie, qu'il n'y a aucun avantage à retirer des différentes figures que l'on peut donner aux chambres des

canons. Cette conséquence seroit juste, si, suivant son opinion, l'inflammation de la poudre étoit instantanée; car, dans cette hypothese, le premier effort de la poudre seroit le même, quelle que fût la figure de la capacité qui renferme la poudre, pourvu qu'elle en fût entiérement remplie, & quand même une partie de cette capacité ne contiendroit pas de poudre; comme dans ce cas la force impulsive seroit d'autant plus petite, qu'il y auroit derriere le boulet un plus grand espace vuide de poudre, la figure de la chambre seroit encore indifférente. Et si le boulet est actuellement en mouvement, la force qui le pousse est au premier effort de la poudre, comme l'espace qu'occupoit la poudre avant l'inflammation, est à ce même espace augmenté de celui que le boulet a déjà parcouru; ainsi dans ce cas, comme dans les précédens, la figure de la chambre n'a point d'influence sur la force impulsive de la poudre. Il est donc indifférent de donner au fond de l'ame d'un canon quelle figure on voudra; & comme elle ne change rien à l'effet de la poudre, on fera bien de s'en tenir à celle qui sera la plus commode, eu égard aux autres circonstances. S'il n'y avoit donc point d'autres raisons pour changer la forme ordinaire des canons, on pourroit, en suivant les principes de l'Auteur, la conserver en toute sûreté, & rejeter sans autre discussion tous les projets relatifs à de pareils changemens.

Tout ceci n'est fondé, comme on l'a déjà dit, que sur l'opinion de l'Auteur, que la poudre d'une charge s'enflamme toute au même instant; mais comme nous avons opposé les

plus fortes raisons à ce sentiment, on ne doit pas encore renoncer aux recherches qui ont pour objet la forme la plus avantageuse des chambres dans les bouches à feu. La question se réduit donc à savoir si la figure de la capacité qui renferme une charge de poudre, peut contribuer ou non à rendre l'inflammation plus prompte ou plus lente : si l'on répond affirmativement, il n'est pas douteux que la figure qui procurera la plus prompte inflammation, ne soit la plus avantageuse; l'impulsion étant d'autant plus forte, plus durable, & par conséquent le mouvement du boulet d'autant plus rapide, qu'il s'allume une plus grande quantité de poudre au premier instant. Or, il est aisé de faire voir que la figure de la chambre contribue beaucoup à rendre l'inflammation plus prompte; il ne faut, pour s'en convaincre, qu'emplir de poudre un tube long & étroit, & l'allumer par une extrémité; il est certain que le feu ne gagnera pas l'autre extrémité aussi promptement que si le tube étoit plus court. Et il est aisé de concevoir que si la chambre d'un canon étoit transformé en un canal long & étroit à proportion, le boulet recevroit une vîtesse beaucoup moindre, quand même on emploieroit la même charge. On voit donc que l'inflammation est d'autant plus prompte, que les grains de poudre sont plus rapprochés les uns des autres: & comme de toutes les figures qui renferment le même espace, la sphérique est celle qui a la moindre surface, & dont les parties sont le plus rapprochées entre elles, il s'ensuit que l'inflammation sera la plus prompte, lorsque la poudre sera renfermée dans une chambre sphérique. On

parviendra donc à augmenter la vîtesse du boulet, si l'on donne au fond de l'ame d'un canon une forme arrondie ou entiérement sphérique, ou approchante de cette figure. L'effet seroit aussi plus considérable, si l'on pouvoit porter le feu au centre de la charge, qui est le point d'où l'inflammation gagneroit plus rapidement les extrémités. On rencontreroit, selon toute apparence, bien des difficultés, si l'on vouloit réaliser ces idées; mais un Praticien éclairé & expérimenté trouvera peut-être moyen de les surmonter, & d'exécuter ce que nous proposons. Il nous suffit d'avoir indiqué les circonstances qui peuvent rendre la figure de la chambre plus propre à augmenter les effets de la poudre, & d'avoir mis en état de mieux apprécier ce que l'on pourra proposer à ce sujet. Nous ajouterons seulement que plus l'effort de la poudre est grand dans le premier instant de l'inflammation, plus le canon doit être fort de métal du côté de la culasse.



PROPOSITION X.

Déterminer les changemens occaſionnés dans la force de la Poudre, par les différens états de l'athmoſphere.

DANS toutes les expériences que j'ai faites juſqu'à préſent, je ne me ſuis point encore apperçu que les différentes peſanteurs de l'athmoſphere euſſent produit le moindre changement dans la force de la poudre; j'en ai cependant fait un très-grand nombre, en diverſes ſaiſons. J'ai ſouvent comparé les expériences faites à midi, pendant les grandes chaleurs de l'été, avec d'autres faites à la fraîcheur du matin & du ſoir, ſans y découvrir la moindre différence, la même conformité s'eſt rencontrée entre celles qui ont été exécutées durant la nuit & pendant l'hiver, quoique, dans des temps auſſi différens, la denſité de l'air eût dû beaucoup varier. Et en effet, puiſqu'il ſe développe, ſoit dans l'air, ſoit dans le vuide, une même quantité de ce fluide élaſtique qui conſtitue toute la force de la poudre, il eſt évident que cette force ne doit ſouffrir aucun changement du plus ou moins de denſité de l'air.

Si la denſité de l'air n'influe point ſur la force de la poudre, il n'en eſt pas de même de ſon humidité, dont les effets ſont beaucoup plus ſenſibles: car j'ai trouvé que la même charge de poudre qui, dans un temps ſec, communiquoit au boulet une viteſſe de 1700 pieds par ſeconde,

feconde, ne lui en donnoit qu'une de 12 à 1300 pieds dans un temps humide, & moins encore lorfque la poudre étoit d'une mauvaife qualité, ou qu'elle n'avoit pas été bien confervée.

Il réfulte auffi de mes expériences, que cette diminution de force dans les poudres humides, n'a rien de conftant, & varie au point que deux coups tirés avec la même quantité de poudre, prife dans le même barril, différoient dix fois plus l'un de l'autre, que fi la poudre eût été bien feche. Ce que ces variations m'ont laiffé appercevoir de plus certain, c'eft que les petites charges perdent plus de leur force que les grandes, le degré d'humidité étant le même de part & d'autre. Un autre effet de la poudre humide, c'eft qu'elle laiffe beaucoup plus de craffe dans la piece, qu'une égale quantité de poudre feche.

On concevra facilement la raifon de ces effets, fi l'on confidere que la poudre tire toute fon humidité de l'air : car fi trop d'humidité dans la poudre la rend incapable de s'enflammer, il s'enfuit qu'un moindre degré d'humidité, s'il n'empêche pas abfolument l'inflammation, doit au moins diminuer la violence de l'explofion. Il fe développera donc alors une moindre quantité de fluide élaftique; il y aura un moindre degré de chaleur, & par conféquent une moindre force expanfive. D'où l'on voit que deux caufes concourent à affoiblir la force de la poudre, relativement à l'humidité dont elle eft pénétrée.

La mauvaife qualité de la poudre vient principalement du falpêtre, qui, n'étant point affez purifié, contient encore du fel commun : &

comme ce ſel attire l'humidité de l'air beaucoup plus fortement que le ſalpêtre, il eſt aiſé de concevoir que, dans un temps humide, la mauvaiſe poudre doit ſe charger de plus d'humidité que la bonne, & avoir par conſéquent d'autant moins de force.

Les irrégularités que l'on obſerve dans les effets de la poudre humide, proviennent, autant que je puis le préſumer, des différens degrés de ſéchereſſe qu'elle acquiert dans le canon. Car, puiſque la piece s'échauffe après la premiere & la ſeconde décharge, ſi la poudre reſte dans le canon, il faut qu'une partie de ſon humidité ſe diſſipe par l'évaporation. Or, la chaleur des armes à feu, & le temps que la poudre y demeure, ſont des circonſtances ſujettes à beaucoup de variations, il n'eſt donc pas étonnant qu'on ne puiſſe rien fixer de conſtant ſur la quantité de cette évaporation, & ſur la force qui en réſulte à la poudre. Il eſt à remarquer auſſi que, dans le temps le plus ſec, il arrive ſouvent que la force de la poudre eſt diminuée, ſoit par la fraîcheur du canon, ſoit par l'humidité qui peut s'y trouver.

Au reſte, ſi une moindre quantité de poudre, le degré d'humidité étant le même, perd plus de ſa force qu'une plus grande, cela vient ſans doute de ce que l'intenſité de la chaleur qui accompagne l'inflammation, eſt, comme on l'a déjà vu, moindre dans les petites charges que dans les grandes; car le même degré d'humidité doit produire une plus grande diminution de force, lorſque la chaleur eſt foible, que lorſqu'elle eſt plus vive.

La poudre humide laiſſe dans les pieces une

crasse, que l'on doit aussi attribuer à une moindre activité de la chaleur produite par l'inflammation : car lorsque la poudre est d'une bonne qualité, qu'elle s'enflamme subitement & avec violence, la plus grande partie de la charge est alors réduite en cendres, que l'on voit répandues devant le canon sous la forme d'une poussiere grisâtre. La crasse, au contraire, qui reste dans la piece, ne vient que des parties de la poudre qui, soit par une mauvaise manipulation, soit à cause de la fraîcheur des parois auxquelles elles s'attachent, n'ont pas pu s'enflammer entiérement. L'inflammation d'une poudre humide produisant donc une chaleur d'autant moins active qu'elle contient plus d'humidité, le feu ne consumera, dans ce cas, qu'une petite partie de la poudre, & la réduira en cendres; il en restera donc une plus grande partie pour former cette crasse que l'on voit dans la piece, après avoir tiré.

Scholie.

Nous avons supposé, dans cette Proposition, comme un fait incontestable, que la poudre attire à soi & se charge de l'humidité de l'air. Il nous reste maintenant à déterminer la quantité de cette humidité, & c'est ce que nous allons déduire de nos propres expériences.

J'ai mis un peu de poudre de la meilleure qualité sur du papier blanc, percé de plusieurs petits trous; je l'ai tenu pendant quelque temps au dessus de la vapeur de l'eau chaude, & j'ai trouvé, après une demi-minute, que le poids de la poudre étoit augmenté d'un cinquantieme.

La même expérience ayant été répétée, en laissant la poudre exposée un peu plus long-temps à la vapeur de l'eau; son poids a augmenté de $\frac{1}{24}$: & dans ce dernier cas, plusieurs grains s'étoient déjà collés ensemble, quoiqu'ils n'eussent point encore changé de figure.

Afin de m'assurer encore davantage que l'humidité de l'air est capable d'augmenter ainsi le poids de la poudre, je pris environ une once de poudre gardée dans une chambre où l'on fait journellement du feu, & après l'avoir encore bien fait sécher auprès du feu, j'y trouvai une diminution d'un centieme de son poids; l'ayant ensuite éloignée du feu dans la même chambre, elle reprit, en moins de deux heures, le tiers du poids qu'elle avoit perdu.

Comme l'air est souvent beaucoup plus humide, & que, de plus, l'air extérieur est toujours plus chargé d'humidité, que celui qui est renfermé dans une chambre où l'on fait du feu, il n'est pas douteux que, le plus souvent, l'humidité contenue dans la meilleure poudre, n'en fasse la vingtieme ou la trentieme partie; ce qui suffit pour la regarder comme la cause des effets inconstans de la poudre.

Je ne me suis cependant jamais apperçu que l'humidité que la poudre tire de l'air, affoiblisse sa force, lorsqu'on a l'attention de la faire sécher avant de l'employer. On a pu voir, par l'exposé des expériences de la Proposition précédente, avec quelle justesse se sont accordées celles qui ont été faites avec la même charge, & dans les mêmes circonstances, quoique ce fût en différens temps pendant les trois mois d'été : la raison de cet accord est, que le temps

a toujours été assez sec, pour empêcher les effets irréguliers de l'humidité. Mais lorsqu'on fait ces épreuves avec la même poudre, en hiver, par un temps humide, j'ai observé qu'en l'employant, comme pendant l'été, sans l'avoir préalablement fait sécher, ses effets étoient plus irréguliers & plus foibles; au lieu qu'en la faisant sécher immédiatement avant d'en faire usage, on n'y appercevoit pas la moindre diminution de force, & les résultats étoient les mêmes qu'en été. Mais si la poudre est exposée à une trop grande humidité, ou si elle contient trop de sel commun, l'humidité attirée par ce sel pourra être assez abondante pour dissoudre une partie du salpêtre, la poudre est alors absolument hors de service, sans qu'il soit possible d'y porter remede par aucune dessication. Si l'on a soin au contraire de garantir la poudre des vapeurs aqueuses, & que le salpêtre qui entre dans sa composition, soit bien épuré de sel commun, elle conservera toute sa force beaucoup plus long-temps qu'on ne le pense communément; j'ai même oui dire que de la poudre, ainsi conservée avec les précautions convenables, n'avoit souffert aucune altération, même au bout de cinquante ans.

Il y a aussi quelques mesures à garder, lorsqu'on veut faire sécher la poudre : il est un degré de chaleur qui, quoiqu'insuffisant pour enflammer la poudre, est néanmoins capable de fondre le soufre, & d'altérer par là l'arrangement de la composition. Il y a même un autre degré de chaleur qui allume le soufre & le consume peu à peu, sans que pour cela la poudre s'enflamme; c'est de quoi l'on peut se convaincre,

en laiſſant tomber quelques grains de poudre ſur un morceau de fer qu'on aura fait rougir, & à meſure qu'il refroidira, on verra qu'après un certain temps les grains ne s'enflammeront plus, & que, ſans ſe conſumer entiérement, ils brûleront lentement, en répandant une petite flamme bleue. Quelquefois néanmoins ces grains commençant ainſi à brûler, s'enflammeront enfin tout-à-fait; & cela arrive ordinairement quand ils ſont près les uns des autres : car, quoique la flamme de chaque grain en particulier n'ait point aſſez d'activité pour occaſionner une exploſion, néanmoins, de la réunion de deux ou pluſieurs de ces petites flammes, il peut réſulter une chaleur aſſez grande pour faire détonner le ſalpêtre, & conſumer les grains. Ce degré de chaleur du fer une fois connu, ſi on le parſeme alors de grains de poudre, il s'y étendra auſſi-tôt une flamme bleue qui durera un temps aſſez conſidérable, avant l'entiere inflammation des grains. J'ai examiné pluſieurs de ces grains avant qu'ils fuſſent entiérement allumés, & je n'ai trouvé aucun changement, ni dans leur couleur, ni dans leur figure. Mais comme la poudre perd toute ſa force lorſque le ſoufre y eſt ainſi fondu, il eſt évident qu'en faiſant ſécher la poudre à une trop grande chaleur, on riſque de l'altérer & de l'affoiblir.

Les différences conſidérables qui ſe trouvent entre la poudre ſeche & la poudre humide, relativement aux effets dont nous avons parlé dans cette Propoſition, font aſſez voir l'inexactitude de la plupart des pratiques de l'Artillerie, dans leſquelles on n'a point égard à cette circonſtance, & combien l'on doit peu compter

ſur des épreuves ſujettes à tant d'incertitude & d'irrégularités.

Avant de terminer cet article, il faut que j'expoſe encore ici une penſée qui m'eſt venue ſur cette matiere. Puiſque l'eau, quand elle eſt réduite en vapeurs, devient, comme on ſait, dix fois plus élaſtique que l'air, j'imaginai que l'humidité attirée par la poudre pourroit, dans certains cas, être tellement proportionnée, qu'étant réduite en vapeurs par l'inflammation, elle pourroit, par ſon élaſticité, compenſer la perte de force qu'elle occaſionne, en ôtant à la flamme une partie de ſon activité. J'ai d'abord été confirmé dans l'opinion que cela pouvoit être ainſi, par les expériences d'un Auteur moderne, qui aſſure avoir obtenu de plus grandes portées avec la même bombe & la même charge, pendant la fraîcheur du matin, que pendant la chaleur du jour : car j'étois bien convaincu que la différence des denſités de l'air ne pouvoit pas être, comme cet Auteur le penſoit, la cauſe de la différence de ces portées. Mais ayant examiné la choſe avec plus d'attention, je n'ai pas pu reconnoître dans l'humidité de la poudre, une cauſe de l'augmentation de ſa force : car, dans le grand nombre d'expériences que j'ai faites à cet effet, je n'ai jamais obſervé que cette force excédât ſenſiblement ſa force moyenne, excepté dans deux; encore cette augmentation n'avoit-elle été occaſionnée que par quelque dérangement dans la machine. Au reſte, ſi la force élaſtique des vapeurs de l'eau eſt auſſi grande qu'on le penſe communément, (ce qui n'eſt pas encore bien conſtaté) il pourroit bien ſe faire que la poudre, ſur-tout ſi elle eſt en

grande quantité, en reçût une augmentation de force.

REMARQUE.

L'Auteur examine, dans cette Propofition, une queftion bien importante, favoir : pourquoi la poudre a beaucoup moins de force dans un temps que dans un autre ? Cela dépend de la quantité de vapeurs aqueufes que la poudre tire de l'air, & dont elle eft pénétrée. Il fe préfente ici deux circonftances à examiner : premiérement, quelle eft la quantité d'humidité qui fe trouve à chaque fois dans la poudre : fecondement, de combien fa force eft affoiblie par chaque degré d'humidité. La premiere eft aifée à déterminer ; car fi l'on fait bien fécher une certaine quantité de poudre, & qu'après l'avoir pefée exactement, on l'expofe à l'air, fi on la pefe de nouveau à chaque variation de l'athmofphere, on trouvera, par l'augmentation de fon poids, de combien d'humidité elle eft chargée. L'humidité de l'air pouvant facilement être mefurée par le moyen de l'hygrometre, on pourroit faire des expériences très-utiles fur ce fujet, en pefant une certaine quantité de poudre à chaque variation indiquée par l'hygrometre. On connoîtroit par là quelle eft la quantité d'humidité que la poudre contient, relativement aux différens états de l'athmofphere, indiqués par l'hygrometre. Mais il faudroit qu'à chaque variation on laiffât la poudre expofée à l'air pendant quelque temps, afin qu'elle pût fe charger du même degré d'humidité que l'air : car il eft aifé de concevoir que quand l'humidité de l'air commence à fe diffiper, il faut plus de

temps à celle que la poudre contient pour s'évaporer. On rencontrera peut-être d'autres difficultés dans le procédé de ces sortes d'expériences, mais cela n'empêche pas qu'elles ne soient d'une grande utilité. Et puisque, suivant l'observation de l'Auteur, la mauvaise poudre attire à soi plus d'humidité que la bonne, on pourroit, par ce moyen, distinguer les différentes qualités de la poudre. La meilleure seroit sûrement celle qui auroit attiré le moins d'humidité.

Quand on aura ainsi déterminé la quantité d'humidité contenue dans la poudre, il ne sera pas difficile, en employant la méthode dont l'Auteur s'est servi, de connoître son influence sur la force de la poudre; & l'on sera par là en état d'estimer cette force par la seule théorie, & avec beaucoup plus de précision qu'on l'a fait jusqu'à présent. L'Auteur rapporte ici un exemple bien remarquable de la diminution que la poudre humide éprouve dans sa force, savoir : qu'un boulet n'a reçu, d'une charge de poudre humide, qu'une vitesse de 1200 pieds par seconde, tandis que, dans les mêmes circonstances, & avec de la poudre seche, la vitesse a été de 1700 pieds. Il est vrai qu'il ne fait pas mention de la quantité d'humidité dont la poudre étoit pénétrée dans cet exemple; mais si nous supposons que l'humidité faisoit la trentieme partie du poids total, on pourroit dire que lorsqu'une quantité de poudre se trouve chargée d'un trentieme de son poids de vapeurs aqueuses, elle perd par cette cause les $\frac{5}{17}$ de sa force. S'il arrivoit donc, ce qui n'est pourtant pas à présumer, que la déperdition de force dans la

poudre fût proportionnelle à l'humidité qui y eſt mêlée, on pourroit déterminer de combien chaque degré d'humidité feroit capable d'affoiblir la poudre : car fi l'on fuppofe que l'humidité foit la $\frac{1}{n}$ partie du poids de la poudre, alors $\frac{1}{30}$ feroit à $\frac{1}{n}$, comme $\frac{5}{17}$ eſt à ce qu'elle devroit perdre de fa force ; cette perte feroit par conféquent $= \frac{150}{17n}$, ou à peu près $= \frac{9}{n}$; de forte que fi l'humidité étoit la centieme partie du poids de la poudre, fa force feroit diminuée de $\frac{1}{11}$; diminution beaucoup plus grande que ne l'indiquent les expériences de l'Auteur. En effet, fi la poudre confervée pendant quelque temps dans une chambre chaude, perd encore, fuivant l'Auteur, la centieme partie de fon poids, en l'approchant du feu, à plus forte raifon la même différence a-t-elle dû fe trouver dans les charges que l'Auteur a employées dans les expériences précédentes, dont les réfultats s'accordent néanmoins affez exactement avec fa théorie. Ce qu'il y a donc à conclure de ceci, c'eſt que l'humidité de la poudre, quand elle ne fait que la centieme partie de fon poids, ne l'affoiblit pas fenfiblement.

Il eſt aifé de voir auffi, par tout ce qui a été dit, que les différentes pefanteurs & denfités de l'air, n'occafionnent point de changemens fenfibles dans les effets de la poudre. On pourroit peut-être croire que la colonne d'air qui s'oppofe à la fortie du boulet, étant plus pefante, elle devroit détruire une plus grande partie de fa viteffe; mais nous avons vu qu'on pouvoit, fans erreur, faire abſtraction de cette réfiſtance de l'air : on peut donc fe difpenfer d'avoir égard aux variations de fa pefanteur.

PROPOSITION XI.

Déterminer la vîteſſe avec laquelle la flamme de la Poudre s'élance par ſa propre expanſion, lorſqu'il n'y a, ni boulet, ni d'autres corps devant la Poudre.

Si toute la ſubſtance de la poudre étoit convertie, à l'inſtant de l'inflammation, en une matiere ſubtile & élaſtique, l'élaſticité de ce fluide étant connue par notre théorie, ainſi que ſa denſité, il ſeroit aiſé de déterminer la vîteſſe avec laquelle il commence à ſe raréfier, & l'augmentation de vîteſſe qu'il acquiert le long de l'ame du canon. Mais nous avons fait voir que ce fluide élaſtique, qui conſtitue toute la force de la poudre, ne fait que les $\frac{3}{10}$ de ſa ſubſtance ; les ſept autres dixiemes ſe trouvent donc mêlées après l'inflammation avec le fluide élaſtique, & diminuent par conſéquent ſon activité par ſon inertie. D'ailleurs, ces deux différentes matieres dans leſquelles la poudre ſe décompoſe, ne ſont point aſſez exactement unies enſemble, pour participer également au mouvement qui leur eſt communiqué. Mais il faut que les parties groſſieres ſe meuvent moins rapidement que les parties ſubtiles, & qu'il en reſte même beaucoup en arriere, comme on le voit par la craſſe qui tapiſſe l'intérieur du canon, après quelques décharges.

Ces inégalités dans le mouvement expanſif de la flamme de la poudre, nous obligent, pour

le déterminer avec précision, de recourir à l'expérience, & c'est sur elle que nous fonderons toutes nos recherches.

On fit à cet effet deux sortes d'épreuves : les premieres avec le canon que nous avons désigné par la lettre A. On le chargea avec 12 dragmes de poudre, & une bourre légere d'étoupes. Ce canon fut placé de maniere que sa bouche étoit éloignée de 19 pouces du milieu du pendule décrit dans la huitieme Proposition; & y ayant mis le feu, on observa que le pendule, par la seule impulsion de la flamme, faisoit une vibration dont la corde étoit de 13,7 pouces. Si l'on supposoit donc que toutes les parties qui composent la substance de la poudre, eussent frappé le pendule avec une égale vîtesse, cette vitesse auroit été de 2650 pieds par seconde; & c'est la moindre que l'on puisse attribuer à la poudre, pendant son expansion. Mais si l'on suppose que, dans cette même expansion, les parties subtiles ont plus de vitesse que les plus grossieres, ce qui paroît très-conforme à la vérité, il faut alors que la vitesse commune trouvée ci-dessus soit augmentée à l'égard des parties subtiles, & diminuée pour les autres. Mais comme il y a toute apparence que dans l'intervalle des 19 pouces, la flamme perd une grande partie de son activité, j'ai fait d'autres expériences, qui ne sont point sujettes à cet inconvénient.

Je fixai le même canon marqué A sur le pendule, de façon que son axe fût en même temps horizontal & perpendiculaire à la surface GHIK du plateau, ou, ce qui revient au même, dans le plan des oscillations du pendule.

L'axe du canon étoit de six pouces au dessus du milieu du plateau; le poids du canon & des liens de fer qui l'attachoient au pendule, étoit de 11 $\frac{1}{2}$ livres. Ce canon ainsi disposé, on le chargea avec 12 dragmes de poudre, sans balle ni bourre, la poudre n'ayant été rassemblée dans le fond qu'avec la baguette. Après qu'on eut tiré, le pendule fit une vibration dont la corde se trouva de 10 pouces : si l'on réduit cet effet à celui qu'auroit produit la même force appliquée au milieu du plateau, & que l'on déduise ce qu'a pu produire le poids du canon, on trouvera que le pendule auroit fait une vibration dont la corde seroit de 14,4 pouces.

La même expérience ayant été répétée, la corde fut trouvée de 10,1 pouces, ce qui revient à 14,6 pouces, par la réduction dont nous venons de parler.

Pour connoître la différence entre la vîtesse des différentes parties de la flamme, le même canon fut chargé encore avec 12 dragmes de poudre, rassemblée par le moyen d'une bourre d'étoupe du poids d'une dragme. J'imaginai que cette bourre, à cause de sa légéreté, auroit au premier instant le même degré de vîtesse qu'auroit eue la partie subtile de la poudre, s'il n'y avoit point eu de bourre. Je trouvai dans ce cas que la corde de la premiere vibration étoit de 12 pouces, & se réduisoit à 17,3 pouces, en rapportant le choc au milieu du plateau. Ayant donc trouvé 14,5 pouces par les deux premieres épreuves, pour la longueur moyenne de la corde, il s'ensuit que l'augmentation de force occasionnée par l'addition d'une dragme de matiere, mue avec la même vîtesse que la

partie ſubtile de la flamme, en a produit une de 2,8 pouces dans la longueur de la corde. Conſéquemment la viteſſe communiquée à cette dragme de matiere, étoit de 7000 pieds par ſeconde.

On objectera peut-être que ſi le pendule a décrit un plus grand arc dans ce dernier cas, ce n'eſt point tant à cauſe du mouvement communiqué à la bourre, que parce que la poudre ayant été mieux raſſemblée, il a dû s'en allumer une plus grande quantité. Mais s'il étoit vrai qu'il ne dût s'enflammer qu'une partie de la poudre, quand il n'y a pas de bourre, les cordes des différens arcs décrits par le pendule, quand on emploie des charges différentes, n'augmenteroient ou ne diminueroient point dans le même rapport que ces charges : ce rapport a cependant lieu, comme je l'ai trouvé par pluſieurs expériences. Car, avec 9 dragmes de poudre, la corde de la vibration ſe trouva de 7,3 pouces; & de 10 à 10,1 pouces avec la charge de 12 dragmes. Il eſt vrai que 3 dragmes n'ont donné qu'une corde de 2 pouces, moindre d'un demi-pouce que ſuivant le rapport ci-deſſus; mais cette différence peut s'expliquer par d'autres raiſons.

On voit ici une preuve plus forte encore, qu'une charge de poudre s'enflamme toute à la fois, quand même il n'y auroit point de bourre; c'eſt que la partie du mouvement du pendule, occaſionnée par la ſeule expanſion de la poudre, n'eſt pas plus grande lorſqu'il y a une balle devant la poudre, que lorſqu'elle eſt raſſemblée ſans être contenue par une bourre. Nous avons vu que la corde de l'arc décrit par

le pendule, en vertu de la ſeule force expanſive de la poudre, étoit de 10 à 10,1 pouces; mais le même canon ayant été chargé à l'ordinaire avec une balle & la même quantité de poudre, cette corde ſe trouva une fois être de 22 $\frac{1}{4}$ pouces, & une autre de 22 $\frac{7}{8}$, dont la moyenne eſt 22,56. Si nous ſuppoſons maintenant que la balle ait frappé le pendule au point où le canon étoit fixé, & avec la vîteſſe qu'elle avoit en ſortant du canon, la corde de la premiere vibration du pendule auroit été de 12,3 pouces, comme on peut le conclure du poids du pendule, du poids & de la vîteſſe de la balle, & du point où le pendule a été frappé, ſuivant les regles & les expériences rapportées ci-devant. Si donc on retranche 12,3 de 22,56, il reſtera 10,26 pour la corde de l'arc décrit, en vertu de la ſeule impulſion de la poudre. Ce nombre 10,26 differe très-peu de 10,1, que nous avons trouvé plus haut pour la longueur de cette corde, lorſqu'avec la même quantité de poudre, il n'y avoit ni balle ni bourre dans le canon.

Pour ſe convaincre que la vîteſſe de 7000 pieds par ſeconde, que nous attribuons à la partie élaſtique de la flamme, n'eſt pas trop grande, on n'a qu'à ſe rappeller la trente-huitieme expérience de la neuvieme Propoſition, dans laquelle la balle a été chaſſée avec une vîteſſe de 2400 pieds par ſeconde; on auroit apperçu dans ſa force une diminution ſenſible, réſultante de la communication d'un mouvement auſſi rapide que celui de la balle; ce qui n'eſt pourtant point arrivé. Il faut donc, dans ce cas, que la vîteſſe avec laquelle la poudre ſe

dilate en ſuivant la balle, ſans rien perdre ſenſiblement de ſa force, ſoit fort au deſſous de la vîteſſe avec laquelle ſe fait la libre expanſion de la poudre, lorſqu'il n'y a point de balle devant elle.

C'eſt principalement dans cette prodigieuſe vîteſſe avec laquelle la poudre enflammée ſe dilate, que conſiſte la force extraordinaire de la poudre, & qui la rend ſupérieure à toutes les machines, tant anciennes, que modernes, que le ſervice de la guerre a fait imaginer. Il eſt vrai, qu'eu égard ſeulement à la quantité de mouvement communiquée aux projectiles, & qui s'eſtime par le produit de la maſſe multipliée par la vîteſſe, on eſt obligé de convenir que pluſieurs anciennes machines de guerre étoient capables de produire un plus grand mouvement que nos plus grand canons & mortiers. Mais quant à la prodigieuſe vîteſſe qu'on eſt aujourd'hui en état d'imprimer aux projectiles par le moyen de la poudre, rien de ce que les anciennes machines ont pu produire, ne lui eſt comparable. Les anciens pouvoient bien augmenter à volonté la force de leurs machines par des contre-poids, des reſſorts ou des cordes entrelacées, mais chaque augmentation de force exigeoit une augmentation de matiere à mettre en mouvement ; de maniere qu'on ne pouvoit rendre la machine capable d'un plus grand effort, ſans ajouter au poids des parties qui devoient communiquer le mouvement aux projectiles. De là il s'enſuivoit que l'effet de la machine ne conſiſtoit pas ſimplement à lancer un corps, mais encore à faire mouvoir les différentes pieces qui en font tout le

le jeu, & les mettre en état de pourſuivre le corps qu'on vouloit lancer, en le pouſſant continuellement & auſſi long-temps que l'étendue de leur mouvement pouvoit le permettre. Il arrivoit de là que, quoique ces anciennes machines fuſſent capables de lancer des maſſes d'un poids énorme, elles ne pouvoient néanmoins leur donner qu'une très-petite vîteſſe, en comparaiſon de celle que la poudre communique aux boulets & aux autres projectiles. Nos armes ont donc tout l'avantage ſur les anciennes, quand il s'agit d'un mouvement rapide; mais l'on pourroit encore ſe ſervir utilement de celles-ci, quand on n'a beſoin que d'un mouvement médiocre; & elles méritent toute l'attention de ces Militaires éclairés, qui, ſans ſe laiſſer prévenir par les préjugés de leur ſiecle, ſavent ſe prêter à ce qu'exigent les différens objets de leur profeſſion.

Ce qu'on a dit dans cette Propoſition, peut auſſi ſervir à déterminer la force des pétards, puiſque leur action dépend de la force expanſive de la flamme. Il paroît auſſi qu'une quantité de poudre, diſpoſée convenablement dans une machine de cette eſpece, pourroit produire le même effet qu'un boulet deux fois auſſi peſant qu'elle, & dont la vîteſſe ſeroit de 14 à 15000 pieds par ſeconde.

PREMIERE REMARQUE.

Nous avons déjà remarqué plus haut que la vîteſſe imprimée au projectile par la poudre, ne vient pas ſeulement de ſa force expanſive, mais encore de la vîteſſe avec laquelle la flamme

le pourſuit, pendant qu'il parcourt l'ame de la piece. Car il eſt évident que, quelque grande que l'on veuille ſuppoſer la force de la poudre, le boulet n'en recevra jamais un degré de vîteſſe plus grand que celui avec lequel la flamme de la poudre ſe dilateroit, s'il n'y avoit point de boulet devant elle. Or, il n'eſt pas poſſible que la poudre communique ce degré de vîteſſe au projectile, vu qu'elle n'agit ſur lui qu'autant qu'il ſe meut moins vîte que ne feroit la flamme, ſi elle n'avoit point de corps à pouſſer devant elle. Donc, puiſque le boulet réſiſte au mouvement par ſon inertie, & qu'il a encore d'autres obſtacles extérieurs à ſurmonter, il eſt aiſé de voir que ſa vîteſſe ne peut jamais être auſſi grande que celle de la flamme. On voit auſſi que le plus haut degré de vîteſſe que le boulet puiſſe recevoir de la poudre, eſt conſtamment d'autant moindre que celui de la flamme dans ſa libre expanſion, que ce boulet eſt plus peſant, & qu'il a plus d'obſtacles à vaincre. La queſtion que l'Auteur examine dans cette Propoſition, eſt donc de la plus grande importance, & elle mérite d'autant plus toute notre attention, que, de ſa ſolution ſeule, dépend la connoiſſance de la véritable vîteſſe des projectiles. Il eſt vrai que cette ſolution, conſidérée en elle-même, paroît très-facile à l'Auteur, & que n'y trouvant d'autres difficultés que la conſidération des parties hétérogenes dans leſquelles la poudre ſe décompoſe par l'inflammation, il abandonne la théorie, pour ne conſulter que l'expérience. Mais, quoique nous ne doutions point de l'habilité de l'Auteur à réſoudre des queſtions ſemblables, nous croyons néanmoins

que, même indépendamment de la circonſtance des parties hétérogenes, il n'y feroit point parvenu ſans rencontrer de grandes difficultés; car cette queſtion exige une connoiſſance très-profonde de la nature & des loix du mouvement des fluides; & ce n'eſt que depuis peu qu'on eſt en état d'appliquer le calcul à ces ſortes de problêmes. Si les Sciences mathématiques s'étendent juſques-là, c'eſt à MM. Jean & Daniel Bernoulli que nous en avons l'obligation; celui-ci le premier a traité cette matiere dans ſon Hydrodinamique, ouvrage incomparable, & fondé en grande partie ſur le principe de la conſervation des forces vives. Jean Bernoulli ſon pere a auſſi répandu beaucoup de lumiere ſur la nature de ce mouvement, auquel il a fait une application très-ingénieuſe des premiers principes de la Méchanique, comme on peut le voir dans le tome IX. des Mémoires de Pétersbourg, & dans le recueil de ſes Œuvres imprimé à Lauſanne. Or, toutes ces belles découvertes étoient inconnues à notre Auteur, lorſqu'il a compoſé ſon Ouvrage. Il ne feroit donc pas étonnant qu'il eût difficilement réuſſi à réſoudre cette queſtion, quoiqu'il ait paru l'avoir enviſagée comme une choſe très-facile. La plus grande difficulté ne conſiſte point en ce que les parties inégales, dans leſquelles la poudre ſe décompoſe par l'inflammation, ſont affectées de mouvemens inégaux; quand même cette inégalité n'auroit pas lieu, la détermination des différentes forces qui agiſſent ſur chaque partie en particulier, entraîneroit encore de grandes difficultés. Mais ſi l'on fait attention ſpécialement que, dans chaque

poſition où ſe trouve l'air échappé de la poudre durant la dilatation, toutes les parties n'ont point le même degré d'élaſticité, ni par conſéquent le même degré de denſité, le calcul ſe trouveroit tellement compliqué, qu'on pourroit à peine en ſurmonter toutes les difficultés, même en employant les méthodes de MM. Bernoulli. Car puiſque, comme nous l'avons déjà vu, le mouvement de chaque particule s'accélere continuellement tant que dure la dilatation, il faut que celles qui ſont en arriere ſoient plus comprimées que celles qui les précedent, & qu'ainſi la force élaſtique ſoit plus grande en arriere qu'en avant. S'il ſe trouve donc un boulet au devant de la poudre, il ne ſera pouſſé que par la moindre force de la flamme, n'y ayant que les parties antérieures qui agiront ſur lui, par leur élaſticité. Mais comme les parties du fluide élaſtique qui ſe développe par l'exploſion de la poudre, ſont d'une ſi grande ſubtilité, que la moindre force eſt capable de leur donner du mouvement, il peut ſe faire que l'inégalité dans leur élaſticité ne ſoit pas bien ſenſible, & qu'on pourra ſuppoſer, ſans erreur, que dans chaque inſtant l'élaſticité eſt également partagée entre toutes les parties de cette matiere ſubtile. Par ce moyen, on écartera les plus grandes difficultés, & la queſtion pourra ſe réſoudre par les méthodes dont on vient de parler, de la maniere ſuivante.

La matiere ſubtile & élaſtique produite par l'inflammation de la poudre, pouvant être regardée comme un air extrêmement comprimé, nous ſuppoſerons qu'au premier inſtant de l'exploſion de la poudre dans le cylindre creux

AABB (fig. 9.), cet air comprimé remplissoit l'espace AACC. Soit donc la longueur AB de ce cylindre $= a$; le cercle de sa base $= cc$; & AC $= b$; soit aussi l'air comprimé dans l'espace AC m fois plus dense que l'air naturel, m sera aussi, suivant les regles communes, le rapport de son élasticité à celui de l'air naturel. Si l'on suppose maintenant que le mercure se soutient dans le barometre à une hauteur $= h$, le poids de cette colonne de mercure sera égale à l'élasticité de l'air naturel, & cette élasticité sera exprimée par le poids d'une colonne d'air dont la hauteur $= 12000\ h$; donc l'élasticité de l'air comprimé dans l'espace AC sera égale au poids d'une colonne d'air dont la hauteur $= 12000\ mh$. Supposons à présent qu'après un certain temps, cet air se soit étendu jusques en MM, & nommons x la longueur AM; la densité de l'air dilaté dans cet espace sera à la premiere densité de l'air renfermé dans AC, comme AC est à AM, c'est-à-dire, comme b est à x, & sera par conséquent $\frac{mb}{x}$ fois plus grande que la densité de l'air naturel; & son élasticité pourra être exprimée par le poids d'une colonne d'air dont la hauteur $= \frac{12000\,mbh}{x}$. Si donc cet air se dilate librement par sa propre force, & qu'il n'y ait, ni balle, ni bourre devant lui, on déterminera de la maniere suivante la vîtesse de l'expansion, à chaque instant & à chaque endroit. Soit $\sqrt{v}$ la vîtesse progressive de la lame antérieure MM, ensorte que cette vîtesse soit due à la hauteur v; puisque nous supposons que cet air comprimé se dilate uniformément, la vîtesse de toute autre lame ZZ sera d'autant

moindre, que cette lame eſt plus près du fond AA; ſi l'on nomme donc z la diſtance AZ, la vîteſſe en ZZ ſera $= \frac{z\sqrt{v}}{x}$; & pendant que la lame antérieure MM avancera d'une quantité infiniment petite $Mm = dx$, ZZ parcourra un eſpace $= \frac{zdx}{x}$. Et comme la vîteſſe va en augmentant, nous pouvons ſuppoſer, ſuivant les regles du calcul différentiel, que pendant que MM parcourt Mm, la hauteur v s'eſt accrue de dv, ou la vîteſſe $\sqrt{v}$ de $\frac{dv}{2\sqrt{v}}$; l'accroiſſement de la vîteſſe de la lame ZZ pendant le même temps, ſera $\frac{zdv}{2x\sqrt{v}}$, & celui de la hauteur $\frac{zzv}{xx}$ pour acquérir cette vîteſſe, ſera $\frac{zzdv}{xx}$. Donnons maintenant à la lame ZZ une épaiſſeur $Zz = dz$, de maniere que ſon volume ſoit $= ccdz$, & comme, à cet endroit l'air eſt $\frac{mb}{x}$ fois plus denſe que l'air naturel, la lame ZZzz ſera, eu égard à ſa maſſe, égale à un cylindre d'air naturel de même baſe & d'une hauteur $= \frac{mbdz}{x}$. Le mouvement de cette lame étant accéléré, il faut néceſſairement qu'il y ait une force qui produiſe cette accélération; nous ſuppoſerons donc que cette force eſt égale au poids d'une colonne d'air naturel de même baſe que la lame, & d'une hauteur $= 12000p$; mais nous venons de voir que pendant que cette lame parcourt l'eſpace $\frac{zdx}{x}$, la hauteur $\frac{zzv}{xx}$ s'accroît de $\frac{zzdv}{xx}$; il faut donc que, ſuivant les principes de Méchanique, cet accroiſſement $\frac{zzdv}{xx}$

ſoit à l'eſpace $\frac{zdx}{x}$ comme la force $12000\,ccp$, qui accélere le mouvement de cette lame, eſt au poids $\frac{mbccdz}{x}$ de cette même lame, c'eſt-à-dire, $\frac{zzdv}{xx} : \frac{zdx}{x} :: 12000\,ccp : \frac{mbccdz}{x}$; d'où l'on tire $12000\,ccp = \frac{mbcczdzdv}{xxdx} = \frac{mbccdv}{xxdx} zdz$, pour la force accélératrice de l'air contenu dans la lame ZZzz; en intégrant, on aura $\frac{mbccdv}{xxdx} \times \frac{zz}{2}$ pour l'expreſſion de la force néceſſaire à l'accélération de l'air contenu dans l'eſpace AAZZ; & ſi l'on fait $z = x$, on aura $\frac{mbccdv}{2dx}$ pour la force accélératrice de tout l'air contenu dans l'eſpace AAMM. Mais cette force, lorſqu'il n'y a point d'obſtacle à vaincre, n'eſt autre choſe que la force élaſtique de l'air comprimé, & qui eſt égale au poids d'une colonne d'air naturel, dont la hauteur $= \frac{12000\,mbh}{x}$, & la baſe $= cc$; on aura donc cette équation $\frac{dv}{2dx} = \frac{12000\,h}{x}$ & $dv = \frac{24000\,hdx}{x}$, dont l'intégrale eſt $v = 24000\,hl\,\frac{x}{b}$; & ſi l'on met AB $= a$ pour x, on aura la hauteur d'où un corps devroit tomber pour acquérir la viteſſe avec laquelle l'air s'échappe par l'ouverture BB, & cette hauteur ſera $= 24000\,hl\,\frac{a}{b}$, où il eſt à remarquer que pour $l\,\frac{a}{b}$ il ne faut point prendre les logarithmes ordinaires des tables, mais ceux que l'on nomme logarithmes hyperboliques, & que ſi l'on veut faire uſage des logarithmes ordinaires, il faudra les multiplier par 2,302585099,

ce qui donnera $v = 55261\, hl\, \frac{a}{b}$. Si l'on veut ſavoir maintenant quelle eſt la viteſſe par ſeconde qui réſulte de cette hauteur, il n'y aura qu'à réduire la hauteur h en milliemes de pied de Rhin, & diviſer la racine quarrée de v par 4. Si l'on a donc $h = 30$ pouces anglois, cette même quantité exprimée en milliemes de pied de Rhin ſera $= 2425$, & la viteſſe que l'on cherche ſera de $\frac{1}{4} \sqrt{55261 \times 2425\, l\, \frac{a}{b}}$ pieds de Rhin par ſeconde. Dans le premier exemple rapporté par l'Auteur, on a $a = 45$ & $b = 2\frac{5}{8}$; donc $\frac{a}{b} = \frac{360}{21} = \frac{120}{7}$; ainſi, dans ce cas, s'il n'y a, ni balle, ni d'autres corps devant la poudre, & abſtraction faite de toute autre réſiſtance extérieure, la flamme s'élancera hors du canon avec une viteſſe de $\frac{1}{4} \sqrt{55261 \times 2425 \times 1,23438}$ ou 3215 pieds par ſeconde. C'eſt moins que la moitié de ce que l'Auteur a conclu de ſes expériences, quoique nous n'ayons conſidéré, ni la preſſion de l'air, ni ſa réſiſtance, deux cauſes qui doivent encore diminuer cette viteſſe : car la réaction de l'air étant égale au poids du mercure du barometre, ou au poids d'une colonne d'air dont la hauteur $= 12000\, h$; & la réſiſtance à une colonne d'air dont la hauteur $= v$, on aura $(12000\, h + v)\, cc$ pour la totalité de ces réſiſtances; & cette quantité étant retranchée de la force accélératrice $\frac{12000\, mbcch}{x}$ trouvée ci-deſſus, on aura l'équation $\frac{mbdv}{2dx} = \frac{12000\, mbh}{x} - 12000\, h - v$, que l'on changera en celle-ci $dv + \frac{2vdx}{mb} =$

$\frac{24000\,h\,dx}{x} - \frac{24000\,h\,dx}{mb}$. Pour rendre cette équation intégrable, on la multipliera par $e^{\frac{2x}{mb}}$, prenant e pour le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$, ou $e = 2,718281828$; l'intégrale sera $e^{\frac{2x}{mb}} v = 24000\, h \int \frac{e^{\frac{2x}{mb}} dx}{x} - 12000\, h\, e^{\frac{2x}{mb}}$. Maintenant, si m est assez grand par rapport à x, pour que la fraction $\frac{2x}{mb}$ ait une très-petite valeur, on aura à peu près $e^{\frac{2x}{mb}} = 1 + \frac{2x}{mb}$; & par conséquent $\int \frac{e^{\frac{2x}{mb}} dx}{x} = l\frac{x}{b} + \frac{2x}{mb} - \frac{2}{m}$; parce que cette intégrale doit s'évanouir lorsque $x = b$. De là on trouve $\left(1 + \frac{2x}{mb}\right) v = 24000\, h\, l\, \frac{x}{b} + \frac{24000\, hx}{mb} - \frac{24000\, h}{m}$. Multipliant par $\frac{1}{1 + \frac{2x}{mb}}$, ou par $1 - \frac{2x}{mb}$, on aura $v = 24000\, h \left(1 - \frac{2x}{mb}\right) l\, \frac{x}{b} + \frac{24000\, hx}{mb} - \frac{24000\, h}{m}$, en négligeant les termes d'une trop petite valeur. Pour avoir maintenant la vîtesse de la flamme au sortir du canon, on fera $x = a$, & pour employer les logarithmes des tables on les multipliera par $2,30258509$, ce qui donnera $v = 55261\, h \left(1 - \frac{2a}{mb}\right) l\, \frac{a}{b} + \frac{24000\, ha}{mb} - \frac{24000\, h}{m}$. La lettre h exprime encore, comme ci-devant, 2425 milliemes du pied de Rhin;

faiſant avec l'Auteur $m = 1000$, & $\frac{a}{b} = \frac{120}{7}$ $= 17,1428$, on aura $l\,\frac{a}{b} = 1,2340832$; donc $v = 160646077$, & la vîteſſe que l'on cherche ſera de 3168 pieds par ſeconde, ce qui ne diffère pas beaucoup du nombre que nous avons trouvé, en faiſant abſtraction de la réſiſtance de l'air.

SECONDE REMARQUE.

S'il faut s'en rapporter aux expériences de l'Auteur, & aux conſéquences qu'il en a tirées, la vîteſſe que la théorie vient de nous donner eſt certainement beaucoup trop petite; mais elle ſe ſeroit trouvée bien moindre encore, ſi, conformément à la vérité, nous avions ſuppoſé que la poudre ne s'allume point tout à la fois dans le même inſtant : d'ailleurs la conſidération des parties groſſieres de la poudre, auroit encore occaſionné une diminution ſenſible dans cette vîteſſe. Que toutes ces circonſtances concourent, comme on peut le préſumer, à ne donner, dans l'exemple rapporté, qu'une vîteſſe un peu au deſſus de 2000 pieds par ſeconde, il s'enſuivroit qu'une balle ne pourroit jamais être chaſſée avec une vîteſſe auſſi grande que celles qui réſultent des expériences de l'Auteur. Et, quand même nous admettrions l'hypotheſe de l'inflammation inſtantanée, & que les parties groſſieres de la poudre ne fuſſent point un obſtacle au mouvement des parties les plus ſubtiles, la vîteſſe de la balle ſeroit toujours beaucoup plus petite qu'on ne la trouve en effet. Pour rendre ceci plus ſenſible, nous n'avons

qu'à ſuppoſer dans le calcul précédent, qu'outre les particules d'air comprimé qui peuvent être miſes en mouvement, il y a encore une balle à faire mouvoir. Suppoſons donc qu'au devant de l'air condenſé en MM, il y a une balle dont le poids ſoit égal à celui d'une colonne d'air, dont la baſe $= cc$ & la hauteur $= k$; puiſque la balle a un mouvement commun avec les parties antérieures de la lame MM, ſi cette lame eſt pouſſée par une force égale au poids d'une colonne d'air dont la hauteur $=$ P, nous aurons, par les principes de Méchanique, $k\,dv = P\,dx$ & $P = \frac{k\,dv}{dx}$. Cette force étant ajoutée à la force accélératrice de la flamme, qu'on a trouvée $= \frac{mbccdv}{2dx}$; on aura $\frac{mbccdv}{2dx} + \frac{kdv}{dx}$ pour la force accélératrice de la flamme & de la balle; & cette force doit être égale à l'élaſticité en vertu de laquelle ſe fait le mouvement, abſtraction faite de la réſiſtance de l'air, ce qui ne peut point canſer d'erreur ſenſible. On aura donc l'équation ſuivante, après avoir diviſé par cc, $\frac{mbdv}{dx} + \frac{kdv}{dx} = \frac{12000\,mbh}{x}$ & $v = \frac{24000\,mbh}{mb+2k}\ l\,\frac{x}{b}$; d'où l'on voit déjà que la vîteſſe de la balle eſt beaucoup moindre que celle de la flamme ſeule, qui eſt exprimée par l'équation $v = 24000\,h\,l\,\frac{x}{b}$, & que, toutes choſes égales d'ailleurs, la vîteſſe de la balle eſt à celle de la flamme ſeule, comme $\sqrt{mb}$ eſt à $\sqrt{(mb+2k)}$, ou comme 1 à $\sqrt{\left(1+\frac{2k}{mb}\right)}$. Mais la vîteſſe de la flamme a été trouvée ci-deſſus de 3168 pieds par ſeconde, celle de la balle, dans les mêmes

circonſtances, ne ſera donc que de $\frac{3168}{\sqrt{\left(1+\frac{2k}{mb}\right)}}$ pieds par ſeconde. Or, on a ici $m = 1000$, $b = 2\frac{5}{8}$, &, la balle étant de plomb, $k = 4900$ pouces, donc $\sqrt{\left(1 + \frac{2k}{mb}\right)} = \sqrt{\frac{12425}{2625}}$; la vîteſſe de la balle ne ſera donc que de 1456 pieds par ſeconde, par conſéquent beaucoup moindre qu'il ne réſulte des épreuves dans les mêmes circonſtances; & on l'eût trouvée encore moindre, ſi l'on eût conſidéré les parties groſſieres & l'inflammation ſucceſſive de la poudre. Il ſuit bien évidemment de là, que la théorie de l'Auteur ſur la force de la poudre, ne peut aucunement s'accorder avec ſes propres expériences, & qu'il exiſte dans la poudre une force beaucoup plus conſidérable qu'il ne la ſuppoſe. C'eſt donc une raiſon de plus pour embraſſer le ſentiment de M. Daniel Bernoulli, qui ſoutient, dans ſon Hydrodinamique, que la premiere élaſticité de la matiere ſubtile produite par l'inflammation de la poudre, eſt environ 10000 fois plus grande que l'élaſticité de l'air naturel. Or, puiſque la poudre elle-même n'eſt pas 1000 fois plus peſante que l'air, & que l'air qui y eſt comprimé n'en fait que les $\frac{3}{10}$, il faut néceſſairement que, dans les grandes compreſſions, ſon élaſticité augmente ſuivant un plus grand rapport que ſa denſité : car ſi l'on n'accorde point cette conſéquence, on ne pourroit point attibuer à la poudre toute la force qu'elle manifeſte dans les expériences. Ce qui renverſe totalement ce principe adopté par l'Auteur, & que nous avons déjà révoqué en doute,

ſavoir, que l'élaſticité de l'air eſt toujours proportionnelle à ſa denſité. Ce principe ne peut avoir lieu que lorſque l'air n'eſt pas trop comprimé ; & ce n'eſt auſſi que ſur ce cas particulier que portent les preuves de l'Auteur, ainſi que nous l'avons remarqué en ſon lieu. Il faut donc recourir à une toute autre doctrine de la nature de l'air, ſi nous voulons avoir des notions plus lumineuſes & plus exactes des effets de la poudre. La théorie de l'air qui, juſqu'à préſent, me paroît la plus propre à cet effet, eſt celle que j'ai donnée dans la ſeconde partie du Commentaire de l'Académie de Pétersbourg; elle eſt fondée ſur l'idée que je me ſuis formée de la ſtructure des parties de l'air, & voici ce qui en réſulte : l'air étant un compoſé de parties matérielles, il eſt évident qu'il ne peut pas être comprimé indéfiniment, & qu'il y a un degré de denſité au-delà duquel il n'eſt plus ſuſceptible de compreſſion. Soit donc ce plus haut degré de denſité q fois plus grand que la denſité de l'air naturel; la quantité q étant ſuppoſée connue, j'ai trouvé que l'élaſticité de l'air naturel eſt à l'élaſticité d'un air m fois plus comprimé, comme $\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-1)^2}$ eſt à $\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-m)^2}$ (14). L'élaſticité de l'air naturel étant donc exprimée par un cylindre de mercure dont la hauteur $= h$; l'élaſticité d'un air m fois plus denſe, ſera exprimée par un cylindre de mercure dont la hauteur $= \frac{\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-m)^2}}{\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-1)^2}} h$. Mais

(14) Voyez à la fin du livre, l'extrait de la Diſſertation de M. Euler ſur ce ſujet.

comme q eſt un très-grand nombre, & vraiſemblablement beaucoup plus grand que m, nous aurons une approximation ſuffiſante pour le cas préſent, en prenant $\sqrt[3]{(q-1)^2} = \sqrt[3]{q^2} - \frac{2}{3\sqrt[3]{q}} - \frac{1}{9q\sqrt[3]{q}}$; & $\sqrt[3]{(q-m)^2} = \sqrt[3]{q^2} - \frac{2m}{3\sqrt[3]{q}} - \frac{mm}{9q\sqrt[3]{q}}$. Ainſi, l'élaſticité d'un air m fois plus denſe que l'air naturel, pourra être exprimée par $\frac{6mq+mm}{6q+1}\,h = (m + \frac{m(m-1)}{6q})\,h$; ou bien l'élaſticité de l'air naturel eſt à l'élaſticité d'un air m fois plus denſe, comme 1 eſt à $m + \frac{m(m-1)}{6q}$; & cette formule donne en même temps la regle de l'Auteur, ſavoir, que lorſque m n'eſt pas un nombre trop grand, l'élaſticité de l'air eſt proportionnelle à ſa denſité. Mais lorſque m a une aſſez grande valeur, pour que la fraction $\frac{m(m-1)}{6q}$ ne puiſſe point être négligée, cette regle s'écartera ſenſiblement de la vérité. Mais tout ceci eſt fondé ſur la valeur de la quantité q qui nous eſt inconnue; pour la déterminer, il ſuffiroit de connoître pour un ſeul cas, de combien la regle commune s'écarte de la vérité. Nous ſavons déjà que l'air naturel étant réduit, par la compreſſion, à un volume 244 fois moindre, ainſi qu'il l'eſt dans la poudre, ſon élaſticité doit augmenter dans un bien plus grand rapport, indépendamment de l'augmentation occaſionnée par la chaleur; il ſuit de là que la quantité $6\,q$ devroit être beaucoup plus petite que 244×243. Si l'élaſti-

cité de cet air comprimé étoit 300 fois plus grande que celle de l'air naturel, on auroit $56 = \frac{244 \times 243}{6q}$ & $q = \frac{244 \times 243}{336}$, moindre que 244, ce qui est contre toutes les notions reçues. Mais il est à remarquer que quand m n'est point très-petit par rapport à q, l'approximation ci-dessus ne peut avoir lieu, & dans ce cas, il faudra se servir de la regle suivante; savoir, que l'élasticité de l'air naturel est à l'élasticité d'un air m fois plus dense, comme $\frac{2}{3\sqrt[3]{q}} + \frac{1}{9q\sqrt[3]{q}}$ est à $\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-m)^2}$, c'est-à-dire, comme $6q + 1$ est à $9qq - 9q\sqrt[3]{q(q-m)^2}$. Si l'on a donc $m = 244$, l'élasticité ne pourra augmenter dans un plus grand rapport, qu'autant qu'on aura aussi $q = 244$; &, dans ce cas, l'élasticité de l'air comprimé dans la poudre sera $\frac{9qq}{6q+1}$, ou 366 fois plus grande que l'élasticité de l'air dans son état naturel; & si la chaleur augmente encore ce degré d'élasticité, comme l'Auteur l'a déterminé, l'élasticité de l'air échappé de la poudre, & échauffé par l'inflammation, sera 1500 fois plus grande que celle de l'air naturel. Quoiqu'il paroisse que ce soit-là la plus grande force qu'on puisse attribuer à la poudre, il est aisé de voir néanmoins qu'elle ne suffit pas encore pour expliquer les effets indiqués par l'expérience.

TROISIEME REMARQUE.

Pour parvenir à une connoissance plus exacte de la force de la poudre, on se rappellera d'a-

bord que l'air qui y eſt comprimé, occupe; après avoir repris ſa denſité naturelle, un eſpace 244 fois plus grand que n'étoit le volume de la poudre avant l'inflammation. Mais l'air contenu dans la poudre, n'en eſt qu'environ la troiſieme partie, il doit par conſéquent y être trois fois, ou, ſelon l'Auteur, $\frac{10}{3}$ de fois plus comprimé, c'eſt-à-dire, 813 fois plus denſe que l'air naturel. C'eſt donc dans l'état d'une auſſi forte compreſſion, que l'air ſe trouve renfermé dans le ſalpêtre ; & comme on ne peut pas ſuppoſer pour la quantité q une valeur moindre de 813, il paroît conforme à la vérité de faire $q = 813$, ou, en nombre rond, à 800: car, puiſque ce degré de denſité de l'air ſe trouve conſtamment dans tout ſalpêtre, il eſt à préſumer que c'eſt-là le plus haut degré de compreſſion auquel l'air puiſſe être réduit. De là il eſt aiſé de juger quelles forces prodigieuſes doivent être employées à la formation du ſalpêtre, & que la nature ne les exerce que pour y réduire l'air au plus haut degré de compreſſion, dont il ſoit ſuſceptible; d'où provient auſſi l'homogénéité des différentes parties de ce ſel. Si nous ſuppoſons donc que la denſité que l'air acquiert par une telle compreſſion, ſoit 800 fois plus grande que la denſité de l'air naturel, auquel cas il ſeroit auſſi denſe que l'eau, ce qui ne contribue pas peu à confirmer cette hypotheſe, nous ſerons en état d'établir une théorie certaine ſur les différens degrés d'élaſticité qui ſe trouvent dans l'air, ſuivant ſes différens degrés de denſité : car l'élaſticité de l'air, dans ſon état naturel, étant exprimée par 1, l'élaſticité d'un air m fois plus denſe ſera exprimée par (1200

— 3

$- 3 \sqrt[3]{100 (800-m)^2}) \left(1 - \frac{1}{4800}\right)$, d'où l'on peut tirer les conséquences suivantes.

Premiérement, lorsque m est un très-petit nombre, l'élasticité sera $= m + \frac{m(m-1)}{4800}$; ainsi quand m est une fraction, ce qui arrive lorsque l'air n'est point comprimé, mais raréfié, l'élasticité sera alors proportionnelle à la densité, comme le porte la regle de l'Auteur, & comme l'indiquent toutes les expériences faites sur la raréfaction de l'air.

Secondement, lorsque l'air est réduit, par la compression, à un volume 16 fois moindre, qui est le plus haut degré de compression où l'art puisse le réduire, l'élasticité sera déja $16 \frac{1}{20}$ fois plus grande que celle de l'air naturel ; & comme cette différence peut à peine être apperçue, il n'est pas étonnant que le défaut de la regle commune n'ait pas encore été découvert par l'expérience.

Troisiémement, si m est un nombre plus grand que 16, le défaut de la regle commune sera plus sensible; on ne pourra pas même se servir de la formule $m + \frac{m(m-1)}{4800}$ sans erreur; on fera alors usage de la premiere, savoir, de $(1200 - 3 \sqrt[3]{100 (800 - m)^2})\left(1 - \frac{1}{4800}\right)$. Ainsi, lorsque $m = 100$, l'élasticité sera $= (1200 - 3 \sqrt[3]{4900000}) \left(1 - \frac{1}{4800}\right) = 102,19$. Si $m = 300$, l'élasticité sera $= (1200 - 3 \sqrt[3]{25000000}) \left(1 - \frac{1}{4800}\right) = 322,73$.

Quatriémement enfin, si $m = 800$, ainsi qu'il

arrive dans le salpêtre & la poudre, l'élasticité sera = 1200, laquelle étant encore augmentée par la chaleur de la flamme, devient environ 4 fois plus grande, & sera par conséquent 5000 plus grande que l'élasticité de l'air naturel. Nous avons donc une force 5 fois plus grande qu'il ne résulte de la théorie de l'Auteur, & capable, selon toutes les apparences, de produire les effets connus de la poudre. Voyons jusqu'où cette doctrine s'accorde avec l'expérience.

QUATRIEME REMARQUE.

Supposons donc, comme nous avons déjà fait, que la partie AACC du cylindre AABB (fig. 9.) soit remplie de poudre, puisque l'air comprimé fait les $\frac{3}{10}$ du poids total de la poudre, nous aurons trois sortes de matieres à considérer : premiérement, cet air comprimé, que nous avons vu être 800 fois plus dense que l'air naturel; secondement, les parties grossieres qui entrent dans la composition de la poudre; & troisiémement, l'air naturel qui se trouve entre les grains de poudre. Ces trois sortes de matieres remplissent l'espace AACC; & nous ne croyons pas nous écarter sensiblement de la vérité, en supposant que l'air naturel occupe le quart de cet espace, l'air condensé aussi un quart, & les parties grossieres, les deux autres quarts : de maniere qu'aussi-tôt que l'air condensé s'est dégagé, par l'inflammation, des liens qui le retenoient, il se mêle avec l'air naturel, occupe alors un espace double du premier, & n'est plus que 400 fois plus dense que l'air naturel. L'autre moitié de la capacité AACC est

occupée par les matieres groſſieres de la poudre. Or, ces matieres ne ſont pas toutes chaſſées par la dilatation de l'air avec la lame CC, & elles ne reſtent pas non plus toutes en arriere vers le fond AA. Nous pouvons donc ſuppoſer que la moitié de ces parties groſſieres reſte au fond AA, & que l'autre moitié eſt chaſſée par l'air. Ainſi, dans le premier inſtant après l'inflammation, que nous regarderons pour un moment comme inſtantanée, l'eſpace AACC ſera rempli de maniere que le quart AAEE (fig. 10.) ſera occupé par la moitié des parties groſſieres de la poudre; le quart CCFF par l'autre moitié; & le milieu EEFF formant les deux autres quarts, par l'air comprimé, qui eſt 400 fois plus denſe que l'air naturel. Si l'on fait donc $AC = b$, on aura $AE = \frac{1}{4} b$, $CF = \frac{1}{4} b$, & $EF = \frac{1}{2} b$; & comme les parties groſſieres de la poudre ſont plus peſantes que l'eau, on pourra ſuppoſer que la quantité de ces parties contenue dans CCFF eſt égale à une colonne d'air naturel de même baſe, & d'une hauteur $= 1000\ CF = 250\,b$. Mais pour ne point aſſeoir notre calcul ſur des hypotheſes qui pourroient encore paroître douteuſes, nous ſuppoſerons en général $EF = \frac{1}{\alpha} b$, $AE = CF = \frac{\alpha - 1}{2\alpha} b$, que l'air contenu dans EEFF eſt m fois plus denſe que l'air naturel, & les parties groſſieres dans CCFF n fois plus peſantes que l'air commun; ce qui donnera les mêmes valeurs que ci-deſſus, ſi l'on fait $\alpha = 2$, $m = 400$, & $n = 1000$.

Maintenant ſuppoſons de plus, qu'après un certain temps, l'air condenſé dans l'eſpace EEFF ſe ſoit étendu en EEMM, & que les parties

groſſieres contenues dans CCFF, aient été pouſſées juſques en MMNN, enſorte que MN $=$ FC $= \frac{\alpha - 1}{2\alpha} b$; ſi l'on fait EM $= x$, la denſité de l'air qui ſe trouve dans EEMM ſera $\frac{mb}{\alpha x}$ fois plus denſe que l'air naturel; & ſi l'on prend h pour la hauteur de la colonne d'air dont le poids eſt égal à l'élaſticité de l'air naturel, on aura à peu près $h = 29100$ pieds de Rhin, & l'élaſticité de l'air renfermé dans EEMM ſera égale au poids d'une colonne d'air naturel, dont la hauteur $= \frac{\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q - \frac{mb}{\alpha x})^2}}{\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-1)^2}}\, h = \frac{1 - \sqrt[3]{(1 - \frac{mb}{\alpha q x})^2}}{1 - \sqrt[3]{(1 - \frac{1}{q})^2}}\, h.$

Dans cette formule, q eſt $= 800$; mais nous aimons mieux employer l'expreſſion générale q, afin que, dans le cas où elle auroit une autre valeur, le calcul fût toujours le même. Mais nous n'avons point eu égard, dans cette formule, à l'effet de la chaleur, par laquelle, ſelon l'Auteur, l'élaſticité devient 4 fois plus grande. Pour exprimer ce rapport plus généralement, au lieu du nombre 4, nous nous ſervirons de la lettre β, & on aura l'élaſticité demandée $= \frac{1 - \sqrt[3]{(1 - \frac{mb}{\alpha q x})^2}}{1 - \sqrt[3]{(1 - \frac{1}{q})^2}}\, \beta\, h.$

Soit de plus $\sqrt{v}$ la vîteſſe de la lame MM, & par conſéquent des parties groſſieres contenues en MMNN, c'eſt-à-dire v la hauteur d'où un corps devroit tomber pour acquérir cette vîteſſe; pendant que la lame MM avance d'une quantité M$m = dx$, la hauteur v doit croître

de dv : au moyen de quoi il fera aifé de connoître la force qui accélere le mouvement de la matiere groffiere contenue en MMNN ; car puifque cette matiere eft égale à une colonne d'air dont la hauteur $= \frac{\alpha - 1}{2\alpha} nb$, cette force accélératrice fera égale à une colonne d'air dont la hauteur $= \frac{\alpha - 1}{2\alpha} \times \frac{nbdv}{dx}$. S'il y a de plus une balle à chaffer, dont le poids foit égal à une colonne d'air dont la hauteur $= k$, la force impulfive néceffaire pour cet effet, fera exprimée par une colonne d'air dont la hauteur $= \frac{kdv}{dx}$.

A l'égard de la force capable de produire l'accélération de l'air condenfé dans l'efpace EEMM, dont la denfité eft à celle de l'air naturel, comme $\frac{mb}{\alpha x}$ eft à 1 ; nous n'en confidérerons d'abord qu'une lame ZZ, dont la diftance EZ $= z$; la viteffe de cette lame, comme il a été dit plus haut, fera $= \frac{z\sqrt{v}}{x}$, & elle avancera d'une quantité $\frac{zdx}{x}$, pendant que la lame MM parcourt le petit efpace dx; & la hauteur à laquelle cette viteffe eft due, croîtra dans le même temps de la quantité $\frac{zzdv}{xx}$. Suppofant donc à cette lame une épaiffeur $Zz = dz$, elle fera égale à une colonne d'air dont la hauteur eft $\frac{mbdz}{\alpha x}$, laquelle étant multipliée par $\frac{zzdv}{xx} : \frac{zdx}{x}$, ou par $\frac{zdv}{xdx}$, on aura $\frac{mbzdzdv}{\alpha xxdx} = \frac{mbdv}{\alpha xxdx} \times zdz$ pour la hauteur d'une colonne d'air égale à la force capable de produire l'accélération demandée, & dont l'intégrale $\frac{mbdv}{\alpha xxdx} \times \frac{zz}{2}$ exprimera

la force accélératrice de l'air contenu dans EEZZ. Et si l'on fait $z = x$, on aura $\frac{mbdv}{2\alpha dx}$ pour l'expression de la force nécessaire à l'accélération de l'air contenu dans EEMM.

Supposons d'abord que l'explosion se fasse librement dans le canon, sans qu'il y ait de balle ni d'autre corps devant la poudre, toute la force employée sera $= \frac{mbdv}{2\alpha dx} + \frac{\alpha - 1}{2\alpha} \times \frac{nbdv}{dx} = \frac{(m+(\alpha-1)n)bdv}{2\alpha dx}$, & cette force doit être égale à l'élasticité, en vertu de laquelle l'air se dilate, & que nous avons trouvée $= \frac{1+\sqrt[3]{(1-\frac{mb}{\alpha qx})^2}}{1-\sqrt{(1-\frac{1}{q})^2}}\,\beta h$, moins les obstacles qui ralentissent le mouvement, & qui sont, 1°. la réaction de l'air extérieur que nous représentons par h, & 2°. la résistance de l'air, qui est égale à une colonne d'air dont la hauteur $= v$; on aura donc l'équation $\frac{(m+(\alpha-1)n)bdv}{2\alpha dx} = \frac{1-\sqrt[3]{(1-\frac{mb}{\alpha qx})^2}}{1-\sqrt[3]{(1-\frac{1}{q})^2}}\,\beta h - h - v$; mais comme on a déjà vu que la résistance de l'air ne produit pas dans ce cas un effet bien sensible, nous pourrons, pour la facilité du calcul, négliger au moins le dernier terme v, & l'on aura $\frac{(1-\sqrt[3]{(1-\frac{1}{q})^2})(m+(\alpha-1)n)}{2\alpha}\,bdv = (1-\sqrt[3]{(1-\frac{mb}{\alpha qx})^2})\,\beta h dx - (1-\sqrt[3]{(1-\frac{1}{q})^2})\,h dx$. Pour intégrer cette équation, on remarquera

que $\sqrt[3]{(1-\frac{1}{q})^2} = 1 - \frac{2}{q} - \frac{1}{9qq} - \frac{4}{81q^3} - \frac{7}{243q^4}$ &c. & $\sqrt[3]{(1-\frac{mb}{\alpha qx})^2} = 1 - \frac{2mb}{3\alpha qx} - \frac{m^2b^2}{9\alpha^2q^2x^2} - \frac{4m^3b^3}{81\alpha^3q^3x^3} - \frac{7m^4b^4}{243\alpha^4q^4x^4}$, &c. Après quoi l'on intégrera de maniere que lorſque $x =$ EF $= \frac{b}{\alpha}$, la vîteſſe ou la hauteur v devienne nulle, & l'on aura $\frac{(m+(\alpha-1)n)bv}{2\alpha}\left(\frac{2}{3q} + \frac{1}{9qq} + \frac{4}{81q^3} + \frac{7}{243q^4}\text{ \&c.}\right) = \beta h\left(\frac{2mb}{3\alpha q}\, l\, \frac{\alpha x}{b} - \frac{m^2b^2}{9\alpha^2q^2x} + \frac{m^2b}{9\alpha q^2} - \frac{2m^3b^3}{81\alpha^3q^3x^2} + \frac{2m^3b}{81\alpha q^3}, \text{ \&c.}\right) - hx\left(\frac{2}{3q} + \frac{1}{9qq} + \frac{4}{81q^3}\right) + \frac{hb}{\alpha}\left(\frac{2}{3q} + \frac{1}{9qq} + \frac{4}{81q^3}\right)$. Mais comme les fractions $\frac{1}{3qq} + \frac{4}{81q^3} + \frac{7}{243q^4}$ + &c. ſont d'une très-petite valeur, on pourra les négliger, & l'on aura $\frac{(m+(\alpha-1)n)bv}{2\alpha} = \beta h\left(\frac{mb}{\alpha}\, l\, \frac{\alpha x}{b} + \frac{m^2b}{6\alpha q} - \frac{m^2b^2}{6\alpha^2qx}\right) + \frac{hb}{\alpha} - hx$. Faiſons maintenant EB $= \alpha$, & que x devienne a, on aura pour la vîteſſe avec laquelle la flamme ſort du canon, $v = \frac{2m\beta h}{m+(\alpha-1)n}\left(l\, \frac{\alpha a}{b} + \frac{m}{6q} - \frac{mb}{6\alpha qa}\right) - \frac{2h(\alpha a-b)}{(m+(\alpha-1)n)b}$; formule que l'on peut, ſans erreur ſenſible, réduire à celle-ci : $v = \frac{2\beta mh}{m+(\alpha-1)n}\, l\, \frac{\alpha a}{b}$. Il ne s'agit plus que de mettre à la place de α, β, m, n & h leurs valeurs, ſavoir, $\alpha = 2$;

$\beta = 4$; $m = 400$; $n = 1000$; & $h = 29100$ pieds de Rhin, & l'on aura $v = \frac{16}{7} h l \frac{2a}{b}$. Reprenant ici les valeurs du premier exemple, c'eſt-à-dire, $b = 2 \frac{5}{8}$ pouces anglois, & $a = 45 - \frac{21}{32}$, on aura $2a = 90 - \frac{21}{16}$, & $\frac{2a}{b} = \frac{1419}{42} = 33,8$, donc $l \frac{a}{b} = 1,528917$, qu'il faut multiplier par $2,30258509$.

mais $l\, 1,528917 = 0,184383$
$l\, 2,302585 = 0,362215$
$l \frac{16}{4} \ldots\ldots = 0,359021$

$0,905619$, à quoi il faut ajouter le log. de b, réduit en milliemes du pied de Rhin $\ldots\ldots = 7,463893$

on aura $l v = 8,369512$
& $l \sqrt{v} = 4,184756$ donc $\sqrt{v} = 15302$

dont le quart 3825 eſt la vîteſſe par ſeconde que l'on cherche. Ce peu d'augmentation de vîteſſe ſur celle de 3215 que nous avons trouvée, quoique nous ayons ſuppoſé ici une force beaucoup plus grande, vient principalement des parties groſſieres de la poudre, dont la moitié a dû être chaſſée devant l'air condenſé. Mais ſi nous ſuppoſons que toutes ces parties reſtent au fond A A du canon, on ſupprimera le terme où ſe trouve la lettre n, & on aura l'équation $v = 2 \beta h l \frac{aa}{b}$, ou $v = 8 h l \frac{2a}{b}$; d'où réſulte une vîteſſe $\sqrt{\frac{7}{2}}$ fois plus grande ; elle ſera

donc de 7157 pieds par ſeconde, ou à peu près de 7000, en déduiſant l'effet produit par la réaction de l'air, ce qui s'accorde aſſez bien avec ce que l'Auteur a conjecturé, d'après ſes expériences; car il en conclut que ſi le mouvement de la flamme n'étoit point ralenti par les parties groſſieres de la poudre, elle ſeroit ſortie, dans le cas préſent, avec une vîteſſe de 7000 pieds par ſeconde. Et ce qui ſert encore plus à confirmer notre ſentiment ſur la force de la poudre, c'eſt que nous avons trouvé une vîteſſe plus grande qu'il n'eſt indiqué par l'expérience, attendu qu'à cauſe de l'inflammation ſucceſſive de la poudre, il en faut retrancher quelque choſe.

Quand il y a une balle au devant de la poudre, le calcul ne differe point de celui que nous venons de faire : car ſi l'on prend k pour la hauteur de la colonne d'air dont le poids eſt égal à celui de la balle, la force néceſſaire à l'accélération ſera $= \frac{mbdv}{2\alpha dx} + \frac{\alpha - 1}{2\alpha} \times \frac{nbdv}{dx} + \frac{kdv}{dx} = (mb + (\alpha - 1)nb + 2ak) \frac{dv}{2\alpha dx}$. Or cette force, lorſqu'il n'y avoit point de balle, étoit $= (m + (\alpha - 1)n) \frac{bdv}{2\alpha dx}$; on n'a donc qu'à ſubſtituer $m + (\alpha - 1)n + \frac{2\alpha k}{b}$ à la place de $m + (\alpha - 1)n$ dans le calcul précédent, & la vîteſſe avec laquelle la balle eſt chaſſée hors du canon, ſera exprimée par cette équation $v = \frac{2\beta mbh}{mb + (\alpha - 1)nb + 2\alpha k} \left(l \frac{\alpha a}{b} + \frac{m}{6q} - \frac{mb}{6\alpha qa} \right) - \frac{2h(\alpha a - b)}{mb + (\alpha - 1)nb + 2\alpha k}$; & ſi

l'on ſubſtitue les valeurs ci-deſſus de $\alpha = 2$; $\beta = 4$; $m = 400$; $n = 1000$; $q = 800$, & $h = 29100$ pieds de Rhin, on aura $v = \frac{h}{700b+2k} \left(1600\, b\, l \frac{2a}{b} + (2a - b)\left(\frac{200b}{3a}\right) - 1\right)$; ou bien $v = \frac{h}{700 + \frac{2k}{b}} \left(1600\, l \frac{2a}{b} + \left(\frac{2a}{b} - 1\right)\left(\frac{200b}{3a} - 1\right)\right)$.

Pour appliquer ce calcul au premier exemple de notre Auteur, on aura $a = 44\frac{11}{32}$; $b = 2\frac{5}{8}$; & $k = 4900$ pouces anglois; ce qui donne $\frac{2a}{b} = 33{,}8$, dont le logarithme hyperbolique eſt 3,52045; de plus $\frac{200b}{3a} = 3{,}94$, & $\frac{2k}{b} = 3733$, d'où l'on tire $1600\, l \frac{2a}{b} = 5632{,}72$, $\left(\frac{2a}{b} - 1\right)\left(\frac{200b}{3a} - 1\right) = \frac{96{,}43}{5729{,}15}$; on aura donc $v = \frac{5729{,}15\, h}{4433}$. Pour trouver maintenant la vîteſſe par ſeconde qui réſulte de cette hauteur, on réduira h en milliemes du pied de Rhin, ce qui donne $h = 29100000$, & on diviſera enſuite la racine quarrée de v par 4. Voici l'opération par les logarithmes:

$$
\begin{array}{lrl}
 & l\,h & = 7{,}463893 \\
 & l\ 5729{,}15 & = 3{,}758090 \\
\text{compl.} & l\ 4433 & = \underline{6{,}353302} \\
 & l\,v & = 7{,}575285 \\
 & l\sqrt{v} & = 3{,}787642 \\
 & l\ 4 & = \underline{0{,}602060} \\
 & & \ 3{,}185582
\end{array}
$$

dont le nombre eſt 1533. La vîteſſe de la balle ſera donc de

1533 pieds de Rhin, ou de 1580 pieds anglois par feconde. Or cette vîteffe, qu'il faut encore diminuer à caufe de l'inflammation fucceffive, & la perte de force qui fe fait par la lumiere & le vent de la balle, eft beaucoup plus petite que celle de l'expérience pour le même cas. La raifon de cette différence vient fans doute de ce que nous avons fuppofé, qu'après l'inflammation, l'air condenfé ne rempliffoit que la moitié de la capacité AACC, étant très-vraifemblable que les parties groffieres de la poudre n'occupent point un fi grand efpace. Sur quoi il eft bon d'obferver qu'une petite différence à cet égard, peut en occafionner une très-fenfible dans la vîteffe : car, fi ces parties groffieres n'occupent que le tiers de l'efpace AACC, on aura $\frac{b}{\alpha} = \frac{2}{3} b$ & $\alpha = \frac{3}{2}$, ce qui changera l'équation précédente en celle-ci : $v = \frac{2h}{900b + ,\kappa} \left(1600\, b\, l\, \frac{3a}{2b} + \left(\frac{3}{2} a - b\right)\left(\frac{800b}{9a} - 1\right)\right)$ ou $v = \frac{2h}{900 + \frac{3k}{b}} \left(1600\, l\, \frac{3a}{2b} + \left(\frac{3a}{2b} - 1\right)\left(\frac{800b}{9a} - 1\right)\right)$. Soit donc $b = 2\frac{5}{8}$, $a = 45 - \frac{7}{16}$, & $k = 4900$ pouces anglois, on aura $\frac{3a}{2b} = 25,46$; $\frac{800b}{9a} = 5,23$, & $l\frac{3a}{2b} = 3,23710$; donc $1600\, l\, \frac{3a}{2b} = 5179,36$; $\left(\frac{3a}{2b} - 1\right)\left(\frac{800b}{9a} - 1\right) = \frac{103,46}{5282,82}$; de plus $\frac{3k}{b} = 5600$ & $\frac{900 + \frac{3k}{b}}{2} = 3250$; donc $v = \frac{5282h}{3250}$; par conféquent la vîteffe fera de 1720 pieds de Rhin,

ou de 1773 pieds anglois par feconde. Cette vîteffe eft beaucoup plus grande que celle que donne l'expérience, mais il y a lieu de croire qu'après les déductions convenables, elle s'y trouvera parfaitement conforme : ainfi, nous pouvons regarder la valeur de $\alpha = \frac{1}{2}$ comme très-approchante de la vérité.

CINQUIEME REMARQUE.

De tout ce que nous venons de dire, on peut tirer des conféquences très-utiles, tant fur la nature de la poudre, que fur la maniere de l'employer plus avantageufement; il en pourra même réfulter quelques nouvelles vues, pour perfectionner l'Artillerie.

1°. Puifque les parties groffieres & terreufes qui fe trouvent dans la poudre, influent tellement fur la vîteffe du projectile, que, felon leurs différentes quantités, cette vîteffe éprouve des changemens très-fenfibles, il eft clair que la bonne ou mauvaife qualité de la poudre dépend de la quantité des matieres groffieres qui entrent dans fa compofition, le refte étant fuppofé égal, & que la force de la poudre feroit conftamment la même, fi l'air comprimé & les matieres groffieres y étoient toujours en même proportion.

2°. La force de la poudre ne dépend pas feulement de la quantité de matiere groffiere qu'elle contient; elle dépend encore de la promptitude de l'inflammation. Donc, pour avoir la compofition la plus avantageufe de la poudre, tout confifte à trouver entre le falpêtre & les matieres combuftibles qu'on y mêle, une pro-

portion telle, qu'avec l'inflammation la plus prompte, on ait en même temps le moins de matiere groſſiere qu'il eſt poſſible, c'eſt-à-dire, qu'on n'ait de ces matieres combuſtibles, que ce qu'il en faut pour faire détonner tout le ſalpêtre.

3°. De toutes les ſubſtances qui entrent dans la compoſition de la poudre, le ſalpêtre étant celle qui s'y trouve en plus grande quantité, il eſt eſſentiel de le rafiner avec le plus grand ſoin, & d'en ſéparer autant qu'il eſt poſſible les parties groſſieres & terreuſes, car ces parties diminuent la force de la poudre de deux façons, en retardant l'inflammation, & en augmentant la quantité de matiere à mettre en mouvement.

D'après ces principes, on jugera aiſément de la qualité de chaque eſpece de poudre : tout ce qui retardera l'inflammation, tout ce qui augmentera la quantité des matieres groſſieres, en diminuera la force. Ainſi l'humidité, dont l'effet eſt d'empêcher pluſieurs particules de prendre feu, ou du moins d'en retarder l'inflammation, ne peut qu'affoiblir la poudre. Elle ſera encore affoiblie, ſi le ſalpêtre qui entre dans ſa compoſition n'a pas été rafiné avec ſoin, ou s'il y entre trop de ſoufre, de charbon, ou autre matiere ſemblable; parce qu'en ces différens cas, une partie de la force de la poudre étant employée à mettre ces matieres ſurabondantes en mouvement, eſt en pure perte pour l'effet qu'on en attend. Lors donc que, pour la poudre de la meilleure qualité, on exprimera, dans l'équation ci-deſſus, la lettre α par $\frac{3}{2}$, il faudra lui donner une valeur plus grande pour une

poudre de moindre qualité ; de forte que l'équation par laquelle on a déterminé la viteſſe de la balle, ſera applicable à toutes les eſpeces de poudre. On remarquera encore que, comme nous avons ſuppoſé contre toute vraiſemblance que la charge s'enflamme entiérement dans un inſtant, il faudra diminuer de quelque choſe les vîteſſes trouvées par cette équation. Nous verrons ci-après à quoi ſe réduit cette diminution.

On peut encore, au moyen des recherches que nous venons de faire, déterminer quelle doit être la charge de poudre dans une piece dont les dimenſions ſont données, pour que le boulet en ſoit chaſſé avec la plus grande vîteſſe : car il eſt certainement un point au-delà duquel la vîteſſe du boulet ne peut être augmentée par l'augmentation de la charge. Pour ſe convaincre de cette vérité, il ſuffit de conſidérer la charge de poudre dans les deux cas extrêmes : qu'on ſe repréſente d'abord la piece entiérement remplie, en ne conſervant que la place du boulet, ce mobile étant en ce cas chaſſé de la piece par la premiere impulſion, & la force de l'air comprimé ceſſant preſqu'entiérement d'agir dès qu'il ſe dilate dans l'air extérieur, il eſt clair que la vîteſſe que le boulet recevra dans cette circonſtance, ſera très-peu conſidérable, & moindre que celle qui lui feroit imprimée par une charge plus petite. D'un autre côté, l'on ſait que ſi la charge eſt très-petite, on n'en obtient que peu d'effet. Il y a donc entre ces deux charges une charge moyenne, qui communique au boulet la plus grande vîteſſe poſſible, & telle que, pour peu qu'on l'augmente ou qu'on la diminue, la

vîteſſe du boulet en ſera diminuée. On ſent aiſément, ſans qu'il ſoit beſoin de le dire, combien il ſeroit utile de connoître cette charge: on auroit l'avantage, non-ſeulement d'être sûr de donner au boulet la plus grande vîteſſe poſſible, mais encore de ménager la poudre dans bien des cas, puiſqu'on ſauroit, à n'en pouvoir douter, qu'en augmentant la charge, on ne feroit que diminuer la vîteſſe du boulet. Pour déterminer la grandeur de cette plus forte charge, il ne faut que différentier l'expreſſion de la vîteſſe trouvée ci-deſſus, en ne conſidérant comme variable que la quantité b qui exprime la longueur de l'eſpace occupé par la poudre, & ſuppoſer enſuite cette différentielle $= 0$: nous reprendrons à cet effet l'expreſſion générale, afin qu'on en puiſſe faire l'application à tous les cas.

Cette expreſſion eſt $\frac{v}{2h} = \frac{\beta m b}{mb+(\alpha-1)nb+2\alpha k}\, l\, \frac{\alpha a}{b} + \frac{(\alpha a-b)(\beta m^2 b-6\alpha q a)}{(mb+(\alpha-1)nb+2\alpha k)6\alpha q a}$, dont la différentielle eſt $\frac{2\alpha\beta m k\, db\, l\frac{\alpha a}{b}}{(mb+(\alpha-1)nb+2\alpha k)^2} - \frac{\beta m\, db}{mb+(\alpha-1)nb+2\alpha k} - \frac{-(m+(\alpha-1)n)(\beta m^2 b^2-6\alpha^2 q a^2)db-4\alpha\beta m^2 bk\,db+2\alpha^2 ak(\beta m^2+6q)db}{(mb+(\alpha-1)nb+2\alpha k)^2 6\alpha q a}$

laquelle étant $= 0$, on aura cette équation $12\,\alpha^2 \beta m q k a l \frac{\alpha a}{b} = (m+(\alpha-1)n)\beta m^2 b^2 + 6\alpha\beta m q(m+(\alpha-1)n)ab - 6\alpha^2 q(m+(\alpha-1)n)a^2 + 4\,\alpha\beta m^2 bk + 12\,\alpha^2 \beta m q a k - 2\,\alpha^2 \beta m^2 a k - 12\,\alpha^2 q a k$. Mais k eſt ici un très-grand nombre, puiſqu'il exprime la hauteur d'une colonne d'air de même peſan-

teur que le boulet. Si l'on fait donc le diametre du boulet $= c$, il sera égal à un cylindre de même base & d'une hauteur $= \frac{2}{3} c$, & en supposant que la matiere du boulet est i fois plus dense que l'air, on aura $k = \frac{2}{3} ic$; si le boulet est de fer, ce métal étant 7,820 fois plus dense que l'eau, & l'eau environ 850 fois plus que l'air, on aura $i = 6650$ & $k = 4430 c$. Rejetant donc dans l'équation précédente les termes d'une trop petite valeur, on a $l \frac{\alpha a}{b} = 1 - \frac{m}{6q} + \frac{(m+(\alpha-1)n)a}{2\beta mk} + \frac{mb}{2\alpha qa} + \frac{(m+(\alpha-1)n)b}{2\alpha k} + \frac{(m+(\alpha-1)n)mb^2}{12\alpha^2 qak}$. Maintenant, comme toutes ces fractions sont très-petites par rapport à l'unité, si l'on prend e pour le nombre qui a l'unité pour logarithme, on aura $\frac{\alpha a}{b} = e^{1 - \frac{m}{6q} + \frac{(m+(\alpha-1)n)a}{2\beta mk}} \left(1 + \frac{mb}{3\alpha qa} + \frac{(m+(\alpha-1)n)b}{1\alpha k} + \frac{(m+(\alpha-1)n)mb^2}{12\alpha^2 qak} + \frac{m^2 b^2}{18\alpha^2 q^2 a^2} + \&c.\right)$; d'où il est facile de tirer par approximation la valeur de b. Supposons donc, comme ci-devant, $\alpha = \frac{3}{2}$; $\beta = 4$; $m = 400$; $n = 1000$, & $q = 800$, on aura $\frac{3a}{2b} = e^{1 - \frac{1}{12} + \frac{9a}{32k}} \left(1 + \frac{b}{9a} + \frac{300b}{k} + \frac{50bb}{3ak} + \frac{bb}{162aa}\right)$. Soit, pour abréger, $\frac{\frac{3}{2}a}{e^{1 - \frac{1}{12} + \frac{9a}{32k}}} = \mathrm{A}$, on aura $\mathrm{A} = b + \frac{bb}{9a} + \frac{300bb}{k} + \frac{50b^3}{3ak}$.

Soit

Soit aussi $b = A - PA^2 + QA^3$, on aura $bb = A^2 - 2PA^3$, & $b^3 = A^3$. Donc:

$$\begin{aligned} A = A - PA^2 &+ QA^3 \\ + \tfrac{1}{9a}A^2 &- \tfrac{2P}{9a}A^3 \\ + \tfrac{300}{k}A^2 &- \tfrac{600P}{k}A^3 \\ &+ \tfrac{50}{3ak}A^3 \end{aligned}$$

d'où l'on tire $P = \frac{1}{9a} + \frac{300}{k}$; $Q = 2P\left(\frac{1}{9a} + \frac{300}{k}\right) - \frac{50}{3ak}$.

Appliquons maintenant cette valeur à une piece de 24, dont la longueur soit de 20 calibres, c'est-à-dire, $a = 20c$; le boulet étant de fer, on a $k = 4430c$, donc $P = \frac{1}{180c} + \frac{1}{15c} = \frac{1}{14c}$ & $Q = \frac{1}{98cc} - \frac{1}{5316cc} = \frac{1}{99cc}$: ce qui donne $b = A - \frac{AA}{14c} + \frac{A^3}{99cc}$. Mais $A = \frac{30c}{e^{1-\frac{1}{12}}}$; parce que la fraction $\frac{9a}{32k}$ peut être rejetée comme trop petite, & comme $e^{1-\frac{1}{12}} = \frac{e}{1+\frac{1}{12}}$, on aura $A = \frac{32,5c}{2,718} = 12c$, donc $b = 12c - \frac{72}{7}c$. Mais comme le second terme de cette valeur n'est guere moindre que le premier, on voit que l'approximation dont on s'est servi, ne peut avoir lieu, dans le cas présent. Reprenons donc la premiere équation $A = b$

$+ bb \left(\frac{1}{9a} + \frac{300}{k}\right) + \frac{50b^3}{3ak}$, laquelle, pour le cas dont il eſt queſtion, donne $12c = b + \frac{bb}{14c} + \frac{b^3}{5316cc}$, où l'on peut négliger le dernier terme; on aura cette équation du ſecond degré, $bb + 14bc = 168cc$, & $b = -7c + \sqrt{217cc}$, ou à peu près $b = 7\frac{3}{4}c$, laquelle valeur de b eſt un peu trop grande, à cauſe du terme rejeté : d'où l'on voit qu'avec une piece de 24 le boulet ſera chaſſé avec la plus grande vîteſſe, lorſque la longueur de la charge de poudre ſera de $7\frac{3}{4}$ calibre, ou ſon poids environ une fois & demie celui du boulet. Or, la charge ordinaire n'eſt que moitié du poids du boulet; c'eſt donc avec une charge triple de la charge ordinaire, que le boulet recevra la plus grande vîteſſe; &, pour peu qu'on augmente cette charge, il en réſultera un moindre degré de vîteſſe. A l'égard des autres cas, où l'on tire avec des boulets de fer, on pourra pareillement trouver la plus forte charge, de la maniere ſuivante : ſoit $a = \theta c$, puiſque $k = 4430c$, on aura $A = \frac{13\theta c}{8c} = \frac{3}{5}\theta c$, de plus $A = b + \frac{bb}{9\theta c} + \frac{bb}{15c}$, donc $bb + \frac{45\theta bc}{5+3\theta} = \frac{45\theta Ac}{5+3\theta} = \frac{27\theta\theta cc}{5+3\theta}$, & par conſéquent $b = \frac{-45\theta c + 3\theta c\sqrt{(285+36\theta)}}{10+6\theta}$.

Le rapport de la longueur de la charge au calibre du canon, dépend donc du nombre θ, qui exprime combien il entre de calibres dans la longueur de la piece. De là on a formé la Table ſuivante.

Nombre des calibres dans la longueur de l'ame.	*Longueur de la plus forte charge exprimée en calibres.*
5	. . . 2,46
10	. . . 4,46
15	. . . 6,17
20	. . . 7,71
25	. . . 9,10
30	. . . 10,39
35	. . . 11,60
40	. . . 12,73
45	. . . 13,81
50	. . . 14,83

Il eſt bon d'obſerver que ces nombres ne s'accordent point parfaitement avec l'expérience, ſoit à cauſe de pluſieurs circonſtances que nous n'avons point fait entrer dans le calcul, ſoit parce que l'inflammation de la poudre n'eſt point inſtantanée, ainſi que nous l'avons ſuppoſé ici, ou parce qu'il y a d'autres cauſes qui concourent à affoiblir la force de la poudre.

Sixieme Remarque.

Voyons maintenant de combien la vîteſſe que nous venons de trouver doit être diminuée, ſi la poudre d'une charge ne s'enflamme point toute à la fois dans le même inſtant. Pour cela ſoit, comme ci-devant la longueur AC (fig. 10.) de

la capacité qui contient la poudre $= b$; la longueur AB du canon $= a$; fuppofons auffi qu'après un certain temps, la flamme & la balle font arrivées enfemble jufqu'en NN; faifons AN $= x$, & la vîteffe, tant de la lame NN, que de la balle $= \sqrt{v}$, enforte que, pendant que la balle parcourt N$n = dx$, l'accroiffement de la hauteur v foit dv. Si l'on exprime le poids de la balle par une colonne d'air dont la hauteur $= k$, la force accélératrice de la balle fera $= \frac{k\,dv}{dx}$. Mais comme toute la poudre n'eft pas encore enflammée, nous fuppoferons que la partie actuellement enflammée eft à la charge totale, comme y eft à b; alors y fera une quantité tellement compofée de x & de grandeurs connues, qu'elle s'évanouira lorfque $x = b$, parce qu'alors l'inflammation ne fait que commencer. Et lorfque toute la charge fera enflammée, on aura $y = b$, ce qui arrive lorfque $x = a$, en fuppofant que le canon foit affez long pour que toute la poudre puiffe s'y enflammer, avant le départ de la balle. Mais fi la poudre n'eft point entiérement enflammée avant que la balle foit hors du canon, on n'aura $y = b$ qu'en mettant pour x une quantité plus grande que a. Soit cette quantité $= f$, de maniere qu'on ait $y = b$ lorfque $x = f$. On voit déjà quelle doit être la forme de l'expreffion de y, & que, pour remplir les conditions dont on vient de parler, on peut faire à peu près $y = \frac{b(x-b)^{\mu}}{(f-b)^{\mu}}$. Si l'on fuppofe en outre que la matiere groffiere de la poudre actuellement enflammée, en foit la $\frac{\alpha-1}{\alpha}$^{me}. partie, cette matiere occupera

dans la capacité AM, une partie dont la longueur $= \frac{(\alpha-1)y}{\alpha}$; & comme la poudre qui n'eſt point encore allumée occupe un eſpace dont la longueur $= b - y$, la longueur de ces deux eſpaces pris enſemble, ſera $= b - \frac{y}{\alpha}$; il reſtera donc, pour l'eſpace occupé par l'air, une longueur $= x - b + \frac{y}{\alpha}$. Mais ſi cet air doit ſe raréfier juſqu'à ce que ſa denſité ſoit égale à celle de l'air naturel, il remplira un eſpace de même diametre que le canon, & d'une longueur $= 244\, y$. Il faut donc, dans le cas préſent, que cet air ſoit $\frac{244y}{x - b + \frac{y}{\alpha}}$ fois plus denſe que l'air naturel. Pour abréger, nous ferons $\frac{244y}{x - b + \frac{y}{\alpha}} = s$; & l'élaſticité de cet air ſera, comme nous l'avons fait voir, égale au poids d'une colonne d'air dont la hauteur $= \frac{1 - \sqrt[3]{(1 - \frac{s}{q})^2}}{1 - \sqrt[3]{(1 - \frac{1}{q})^2}} \beta h = \beta h \left(s + \frac{ss}{6q}\right)$, approximation ſuffiſante pour le cas dont il eſt queſtion. La lettre h exprime la hauteur d'une colonne d'air, dont le poids eſt égal à l'élaſticité de l'air dans ſon état naturel, & β indique combien de fois cette élaſticité eſt augmentée par la chaleur. Maintenant, comme la quantité d'air déjà dégagé par l'inflammation, eſt égale à une colonne d'air dont la hauteur $= 244\, y$, la force néceſſaire à ſon accélération ſera $= \frac{122\, y\, dv}{dx}$; car, ſuivant ce qui a été dit plus haut, cette force n'eſt que la moitié de ce

qu'elle feroit, si toutes les parties de cet air étoient également accélérées. D'ailleurs, on doit aussi avoir égard à la matiere grossiere, sur une partie de laquelle la force accélératrice doit agir. Nous supposerons, comme ci-dessus, que la moitié de cette matiere reste en arriere dans le fond AA, que l'autre moitié est chassée avec la balle, & qu'elle est n fois plus dense que l'air naturel, cette moitié sera $= \frac{1}{2} n \left(b - \frac{y}{\alpha}\right)$ & la force nécessaire à son accélération sera $= \frac{1}{2} n \left(b - \frac{y}{\alpha}\right) \frac{dv}{dx}$; de sorte que la totalité de la force accélératrice sera exprimée par $\frac{dv}{dx} \left(k + \frac{1}{2} nb - \frac{ny}{2\alpha} + 122y\right)$, & doit être égale à la force $\beta h \left(s + \frac{ss}{6q}\right)$ que nous venons de trouver, moins la réaction de l'air h, & moins encore la résistance de l'air qu'on pourra exprimer par $\frac{1}{2} v$, à cause de la sphéricité de la balle ; ce qui donne cette équation : $dv\,(2\alpha k + n\alpha b - ny + 244\,\alpha y) = 2\alpha\beta h dx \left(s + \frac{ss}{6q}\right) - 2\alpha h dx - \alpha v dx$, où $s = \frac{244\,\alpha y}{\alpha(x-b)+y}$, & $y = \frac{b(x-b)^{\mu}}{(f-b)^{\mu}}$; d'où l'on tire $s = \frac{244\,\alpha b(x-b)^{\mu-1}}{\alpha(f-b)^{\mu}+b(x-b)^{\mu-1}}$. Si l'on suppose $\mu = 1$, on aura $s = \frac{244\,\alpha b}{\alpha f-(\alpha-1)b}$, & $y = \frac{b(x-b)}{f-b}$; donc dans ce cas, la force élastique sera toujours la même. Arrêtons-nous à cette supposition, à cause de la facilité du calcul, & voyons si elle nous écartera beaucoup de la vérité. On aura $dv\big(\alpha(2k + nb)(f - b) + b\,(244\alpha - n)$

$(x - b)) = \alpha\, d x\, (f - b)\, (2 \beta h\, (s + \frac{ss}{6q}) - 2h - v)$, & par conféquent $\frac{dv}{2\beta h(s + \frac{ss}{6q}) - 2h - v}$ $= \frac{\alpha\, dx(f-b)}{\alpha(2k+nb)(f-b)+b(244\alpha-n)(x-b)}$; dont l'intégrale adaptée au cas préfent, donne $l\, \frac{2\beta h\,(s + \frac{ss}{6q}) - 2h}{2\beta h(s + \frac{ss}{6q}) - 2h - v}$ $= \frac{\alpha(f-b)}{(244\alpha-n)b}\; l\; \frac{\alpha(2k+nb)(f-b+(244\alpha-n)b(x-b)}{\alpha(2k+nb)(f-b)}$.

Suppofons, pour abréger, $2\, \beta h\, (s + \frac{ss}{6q}) - 2h = g$ & $\frac{\alpha(f-b)}{(244\alpha-n)b} = \nu$; on aura $l\, \frac{g}{g-v} = \nu$ $l\, \frac{\nu(2k+nb)+x-b}{\nu(2k+2b)}$, donc $\frac{g}{g-v} = \left(1 + \frac{x-b}{\nu(2k+nb)}\right)^{\nu}$; ce qui donne $v = g - g\, (1 + \frac{x-b}{\nu(2k+nb)})^{-\nu}$. Et fi l'on fait $x = a$, on aura, par cette équation, la vîteffe avec laquelle la balle eft chaffée hors du canon.

Pour en faire l'application à notre exemple, foit, comme à l'ordinaire, $\alpha = \frac{3}{2}$; $\beta = 4$; $n = 1000$; $a = 45$; $b = 2\,\frac{5}{8}$; $f = 45$, & $k = 4900$ pouces anglois, on aura $s = 14{,}51$; $g = 114{,}476h$; $\nu = -\frac{1}{26}$, & enfin $v = \frac{10220}{24850}h$, ce qui donne une vîteffe de 865 pieds par feconde. Quoique cette vîteffe ne foit prefque que moitié de la vîteffe donnée par l'expérience, elle eft néanmoins très-grande, eu égard à la force qui a mis la balle en mouvement; cette force provenant d'un air 14,51 fois feulement plus denfe que l'air naturel, & dont l'élafticité quadruplée par la chaleur, n'eft par conféquent que 58 fois plus grande que l'élafticité de l'air naturel. On

voit donc que nous avons ſuppoſé la quantité μ trop grande : car plus la valeur de μ eſt grande, plus celle de s eſt petite, ainſi que la vîteſſe qui en réſulte. Prenant donc μ moindre que l'unité, on trouvera pour s une plus grande valeur, & par conſéquent une plus grande vîteſſe. Voyons ce que donnera $\mu = \frac{1}{2}$: dans ce cas, l'on aura $s = \frac{244\alpha b}{b+\alpha\sqrt{(f-b)(x-b)}}$, & $y = b\sqrt{\frac{x-b}{f-b}}$; & puiſque $\sqrt{(x-b)} = \frac{y}{b}\sqrt{(f-b)}$, on aura $s = \frac{244\alpha bb}{bb+\alpha(f-b)y}$, & $dx = \frac{2(f-b)ydy}{bb}$. Pour rendre l'intégration moins difficile, négligeons les termes $2\alpha\beta hdx \times \frac{ss}{6q} - 2\alpha hdx + \alpha vdx$, ce qui peut ſe faire, puiſque les deux termes $2\alpha hdx + \alpha vdx$ expriment la réſiſtance que l'air oppoſe : nous avons vu qu'elle étoit de peu de conſéquence, & qu'en outre, ces trois termes ſe détruiſent preſque par les ſignes contraires. Nous aurons donc cette équation, $dv = \frac{2\alpha\beta hsdx}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)y}$; & comme $s = \frac{244\alpha bb}{bb+\alpha(f-b)y}$ & $dx = \frac{2(f-b)ydy}{bb}$, on aura $sdx = \frac{488\alpha(f-b)ydy}{bb+\alpha(f-b)y}$, ce qui donne $dv = \frac{976\alpha^2\beta h(f-b)ydy}{(bb+\alpha(f-b)y)(\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)y)}$. Soit, pour abréger, $\frac{976\alpha^2\beta h(f-b)}{bb(n-244\alpha)+\alpha\alpha(f-b)(2k+nb)} = A$, l'équation trouvée pourra être changée en celle-ci : $dv = \frac{-Abbdy}{bb+\alpha(f-b)y} + \frac{A\alpha(2k+nb)dy}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)y}$; dont l'intégrale eſt $v = C - \frac{Abb}{\alpha(f-b)} l(bb + \alpha(f-b)y) - \frac{A\alpha(2k+nb)}{n-244\alpha} l(\alpha(2k+nb) -$

$(n - 244\,\alpha)y$). La conſtante C doit être telle que l'on ait $v = 0$, lorſque $x = b$, c'eſt-à-dire, lorſque $y = 0$, on aura donc $v = \frac{A\,\alpha(2k+nb)}{n-244\,\alpha}$ $l\,\frac{\alpha(2k+nb)}{\alpha(2k+nb)-(n-244\,\alpha)y} - \frac{Abb}{\alpha(f-b)}\,l\,\frac{bb+\alpha(f-b)y}{bb}$. Maintenant pour connoître la vîteſſe avec laquelle la balle ſort du canon, on fera $x = a$; nous ſuppoſerons auſſi que $f = a$, c'eſt-à-dire, que toute la charge eſt enflammée immédiatement avant le départ de la balle, on aura alors $y = b$ & $A = \frac{976\,\alpha^2\beta h(a-b)}{bb(n-244\,\alpha)+\alpha^2(a-b)(2k+nb)}$; donc $v = \frac{A\,\alpha(2k+nb)}{n-244\,\alpha}\,l\,\frac{\alpha(2k+nb)}{\alpha(2k+nb)-(n-244\,\alpha)b} - \frac{Abb}{\alpha(a-b)}\,l$ $\left(1 - \frac{(n-244\,\alpha)b}{\alpha(2k+nb)}\right)$. Soit $\frac{\alpha(a-b)}{b} = \zeta$, & $\frac{\alpha(2k+nb)}{(n-244\,\alpha)b} = \eta$, on aura $v = -\frac{976\,\beta\eta bh}{(1+\zeta\eta)(2k+nb)}\,l$ $(1+\zeta) - \frac{976\,\beta\zeta\eta^2 bh}{(1+\zeta\eta)(2k+nb)}\,l\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)$.

Pour comparer à préſent ce réſultat avec celui qu'a donné l'hypotheſe de l'inflammation inſtantanée, il n'y a qu'à faire $y = b$ dans l'équation différentielle, & en négligeant les mêmes termes que ci-deſſus, on aura $s = \frac{244\,\alpha b}{\alpha x-(\alpha-1)b}$, & $dv = \frac{488\,\alpha^2\beta bh\,dx}{(\alpha(2k+nb)-(n-244\,\alpha)b}\,l\,\frac{\alpha x-(\alpha-1)b}{b}$; & ſi l'on fait $x = a$, on aura $v = \frac{488\,\alpha^2\beta bh}{\alpha(2k+nb)-(n-244\,\alpha)b}\,l\left(1 + \frac{\alpha(a-b)}{b}\right)$. Soit maintenant, comme ci-devant, $\frac{\alpha(a-b)}{b} = \zeta$, & $\frac{\alpha(2k+nb)}{(n-244\,\alpha)b} = \eta$, on aura $v = \frac{488\,\beta\eta bh}{(\eta-1)(2k+nb)}\,l$ $(1+\zeta)$, que l'on pourra plus facilement com-

parer avec l'expreſſion précédente, que celle que nous avons trouvée plus haut, parce qué les mêmes termes ont été négligés dans les deux hypotheſes. C'eſt pourquoi, ſi nous ſuppoſons que la viteſſe de la balle, dans le cas de l'inflammation inſtantanée, ſoit $= \sqrt{u}$, & que, dans le cas de l'inflammation ſucceſſive, elle ſoit $= \sqrt{v}$, on aura cette proportion $u : v :: \frac{1}{\eta - 1}\, l\, (1 + \zeta) : \frac{-2}{1 + \zeta\eta}\, l\, (1 + \zeta) - \frac{2\zeta\eta}{1 + \zeta\eta}\, l\, (1 - \frac{1}{\eta})$. Et comme les logarithmes des différens ſyſtêmes ont le même rapport entre eux, & qu'il ne s'agit ici que de rapport, on peut employer indifféremment quel ſyſtême on voudra. Si l'on ſuppoſe donc $\alpha = \frac{3}{2}$; $a = 45$; $b = 2\frac{5}{8}$; $k = 4900$, & $n = 1000$, on aura $\zeta = 24,21$, $\eta = 11,2$; donc $u : v :: \frac{10}{102}\, l\, 25,2 : \frac{-1}{136}\, l\, 25,2 + \frac{271}{136}\, l\, \frac{11}{102}$; ou bien $u : v :: 1 : \frac{-102}{1360} + \frac{27642\, l\, 110980}{1360\, l\, 25,2}$, c'eſt-à-dire, $u : v :: 1 :: 0,5140$ & $\sqrt{u} : \sqrt{v} :: 1 : 0,717$. Ces deux vîteſſes ſont donc entre elles comme 1000 eſt à 717. Mais dans l'hypotheſe de l'inflammation inſtantanée, la vîteſſe eſt de 1731 pieds de Rhin par ſeconde; elle ſera donc de 1241, en ſuppoſant l'inflammation ſucceſſive. Or, comme cette hypotheſe de l'inflammation ſucceſſive eſt fondée ſur la valeur de $\mu = \frac{1}{2}$, & qu'en ſuppoſant $\mu = 1$, la vîteſſe a été trouvée de 865 pieds; il eſt évident que ſi pour μ on prend une fraction moindre que $\frac{1}{2}$, on trouveroit une vîteſſe de plus de 1241 pieds, & par conſéquent plus approchante de la vérité. Ainſi, plus la valeur qu'on donnera à μ ſera petite, plus l'inflammation initiale ſera conſidérable, quoique, dans le premier inſtant inſenſible, l'inflamma-

tion doive toujours être regardée comme infiniment petite. Puiſque nous ſommes sûrs à préſent que, dès le commencement de l'inflammation, il s'allume déjà une partie aſſez conſidérable de la poudre, il s'enſuit que la viteſſe de 1241 pieds que l'on vient de trouver, doit être beaucoup trop petite, & que notre ſentiment ſur la ſucceſſion de l'inflammation de la poudre, eſt très-conforme à la vérité : car puiſque l'hypotheſe de l'inflammation inſtantanée donne une viteſſe de 1795 pieds anglois, tandis que l'expérience ne la donne que de 1650, la différence de 145 pieds eſt aſſez conſidérable, pour qu'on en puiſſe conclure que c'eſt à l'inflammation ſucceſſive qu'il faut attribuer cette diminution dans la viteſſe. D'ailleurs, la viteſſe trouvée de de 1795 pieds eſt encore un peu trop petite, à cauſe du terme $\frac{ss}{64}$ qu'on a négligé, & qui, vu la grande valeur de s dans le cas préſent, n'auroit pas dû l'être ; de façon qu'il pourroit plus que compenſer le déchet produit par la lumiere & le vent de la balle, d'autant plus que, dans un mouſquet, le vent de la balle étant preſque totalement intercepté par la bourre, ne laiſſe point échapper aſſez de flamme, pour qu'il en réſulte une diminution ſenſible de viteſſe. Il ne doit donc reſter aucun doute ſur la vérité de la doctrine que l'on vient de donner de la force de la poudre.

SEPTIEME REMARQUE.

Comme il eſt auſſi difficile d'aſſujettir l'inflammation ſucceſſive de la poudre au calcul, que d'exécuter ce calcul lui-même, on pourroit, ce

me femble, fuppofer que, dans le premier inftant, une certaine partie de la poudre s'enflamme toute à la fois, & que l'autre partie ne prend point feu : car, que la poudre s'enflamme auffi promptement ou auffi lentement qu'on voudra, il fera toujours poffible d'en déterminer une portion, laquelle, fi elle s'enflammoit toute à la fois au même inftant, produiroit l'effet demandé. Nous fuppoferons donc, dans les calculs précédens, que cette portion de la charge de poudre, dont l'inflammation eft inftantanée, & qui agit feule fur la balle, eft exprimée par λb, ou bien que cette portion eft à toute la charge, comme $\lambda : 1$; enforte que λ indique une fraction dont la valeur approche d'autant plus de l'unité, que l'inflammation eft plus prompte & plus complette. Ainfi, dans l'équation trouvée ci-deffus, on a $y = \lambda b$, & $s = \frac{244 \alpha \lambda b}{\alpha (x-b) + \lambda b} = \frac{244 \alpha \lambda b}{\alpha x - (\alpha - \lambda) b}$; $\frac{ss}{6q}$ ou $\frac{ss}{4800} = \frac{12,4 \alpha^2 \lambda^2 b^2}{(\alpha x - (\alpha - \lambda) b)^2}$. Or $dv (\alpha (2k + nb) - (n - 244 \alpha) \lambda b = 2 \alpha \beta h dx \left(s + \frac{ss}{6q} \right) - 2 \alpha h dx - a v dx$. Donc, en intégrant, $v (\alpha (2k + nb) - (n - 244 \alpha) \lambda b) = 488 \alpha \beta \lambda b h l \frac{\alpha (x-b) + \lambda b}{\lambda b} - \frac{24,8 \alpha^2 \beta \lambda^2 b^2 h}{\alpha x - (\alpha - \lambda) b} + 24,8 \alpha^2 \beta \lambda b h - 2 \alpha h x + 2 \alpha b h - \alpha \int v dx$. Mais comme il s'en faut déjà très-peu que v ne foit $= \frac{488 \alpha \beta \lambda b h}{\alpha (2k + nb) - (n - 244 \alpha) \lambda b} \times l \frac{\alpha (x-b) + \lambda b}{\lambda b}$, & qu'on a $\alpha \int dv x = v (\alpha x - (\alpha - \lambda) b) - \int dv (\alpha x - (\alpha - \lambda) b)$; on aura $\alpha \int v dx = \frac{488 \alpha \beta \lambda b h (\alpha x - (\alpha - \lambda) b)}{\alpha (2k + nb) - (n - 244 \alpha) \lambda b} l \frac{\alpha (x-b) + \lambda b}{\lambda b} -$

$\frac{488\alpha^2\beta\lambda bh(x-b)}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b}$. Faisant, pour abréger, $\frac{2\alpha b}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b} = m$, on aura $v = 244\beta\lambda mhl\frac{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}{\lambda b} - \frac{12,4\alpha\beta\lambda^2 bhm}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b} + 12,4\alpha\beta\lambda mh - \frac{mh(x-b)}{b} - \frac{244\beta\lambda mh(\alpha x-(\alpha-\lambda)b)}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b} l\frac{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}{\lambda b} + \frac{244\alpha\beta\lambda mh(x-b)}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b}$; ou bien $v = 244\beta\lambda mh\left(1-\frac{m(\alpha x-(\alpha-\lambda)b)}{2\alpha b}\right) l\frac{\alpha x-(\alpha-\lambda)b}{\lambda b} + \frac{12,4\alpha^2\beta\lambda mh(x-b)}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b} - \frac{mh(x-b)}{b}(1-122\beta\lambda m)$.

Enfin, si l'on fait $x = a$, on connoîtra la vîtesse de la balle au sortir du canon, par cette équation, $v = 244\beta\lambda mh\left(1-\frac{m(\alpha(a-b)+\lambda b)}{2\alpha b}\right) l\frac{\alpha(a-b)+\lambda b}{\lambda b} + \frac{12,4\alpha^2\beta\lambda mh(a-b)}{\alpha(a-b)+\lambda b} - \frac{mh(a-b)}{b}(1-122\beta\lambda m)$.

Veut-on maintenant comparer les vîtesses qu'on obtient dans les deux cas de l'inflammation instantanée, & de l'inflammation successive, ou, pour mieux dire, dans le cas où toute la charge de poudre s'enflamme, & dans celui où il n'y en a qu'une partie qui prend feu? Il suffira de prendre le premier terme seulement. Soit donc $\sqrt{u}$ la vîtesse de la balle dans le premier cas, & $\sqrt{v}$ sa vîtesse dans le second, la partie enflammée dans celui-ci étant à la charge entiere comme $\lambda : 1$, on aura $u : v :: \frac{1}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)b} l\frac{\alpha(a-b)+b}{b} : \frac{\lambda}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b} l\frac{\alpha(a-b)+\lambda b}{\lambda b}$

ou $u : v :: 1 : \frac{\alpha\lambda(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda bl\frac{\alpha(a-b)+\lambda b}{\lambda b}}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda bl\frac{\alpha(a-b)+b}{b}}$;

& si, pour abréger, on suppose, comme ci-dessus, $\frac{\alpha(a-b)}{b} = \zeta$ & $\frac{\alpha(2k+nb)}{(n-244\alpha)b} = \eta$, on aura $u : v :: 1 : \frac{(\eta-1)\lambda}{\eta-\lambda} \cdot \frac{l(\zeta+\lambda):\lambda}{l(\zeta+1)}$.

Appliquant ceci au même exemple qui nous a déjà si souvent occupé, dans lequel $\alpha = \frac{3}{2}$; $a = 45$; $b = 2\frac{5}{8}$; $k = 4900$, & $n = 1000$, on aura $\zeta = 24,21$, & $\eta = 11,2$; donc $u : v :: 1 : \frac{10,2\lambda}{11,2-\lambda} \times \frac{l\frac{24,21+\lambda}{\lambda}}{l\,25,21}$. Soit, par exemple, $\lambda = \frac{3}{4}$, on aura $u : v :: 1 : 0,73208\ \frac{l\,33\,28}{l\,25,21} :: 1 : 0,7950$, & les vîtesses elles-mêmes $\sqrt{u} : \sqrt{v} :: 1 : 0,8916$.

Mais nous avons vu que, dans le cas d'une inflammation totale de la charge, la vitesse de la balle étoit d'environ 1800 pieds; elle ne sera donc que de 1605 pieds anglois, lorsqu'il ne s'en enflamme que les $\frac{3}{4}$. Mais il est vraisemblable que, pour approcher davantage de la vérité, il faut donner à la quantité λ une valeur plus grande que $\frac{3}{4}$; supposons-la $= \frac{7}{8}$, on trouvera 1707 pieds pour la vîtesse de la balle par seconde, qui surpasse déjà celle qui résulte de l'expérience. Et comme une partie de la force se perd par la lumiere & le vent de la balle, on pourra supposer $\lambda = 0,93$, si la poudre est d'une bonne qualité, telle que celle que l'Auteur a employée. Notre exemple donnera alors cette proportion : $\sqrt{u} : \sqrt{v} :: 1 : 0,9714$. La vîtesse de la balle est donc à présent de 1749 pieds anglois par seconde. Si l'on en retranche 100 pieds pour la perte qui se fait par le vent & la lu-

miere, on aura la véritable viteſſe trouvée par l'expérience.

Mais la quantité u, ou la vîteſſe de la balle, dans le cas de l'entiere inflammation de la poudre, peut être déterminée avec plus de préciſion, au moyen de la derniere équation qu'on a intégrée, parce qu'on y a fait abſtraction de la réſiſtance de l'air. Il ſuffit pour cela de ſuppoſer $\lambda = 1$, & comme β eſt un nombre tel que, ſuivant l'Auteur, $244\ \beta = 1000$, on aura $122\ \beta = 500$; $12{,}4\ \beta = 50{,}8$; d'ailleurs $n = 1000$ & $\alpha = \frac{3}{2}$, ce qui donne $m = \frac{b}{k + 289 b}$. Suppoſons en outre $\frac{\alpha(a-b)}{b} = \frac{3(a-b)}{2b} = \zeta$, on aura $u = 1000\, m h \left(1 - \frac{m(\zeta+1)}{3}\, l(\zeta + 1) + \frac{76{,}2 \zeta m h}{\zeta + 1} - \frac{2 \zeta m h}{3}\right)(1 - 500 m)$.

Ainſi, dans le même exemple, où l'on a $a = 45$; $b = 2\ \frac{5}{8}$ & $k = 4900$, on trouve $\zeta = 24{,}2143$ & $m = \frac{1}{2155{,}66}$; donc $u = \frac{h}{2{,}15566}$

$$\times\ 0{,}996102\ l\ 25{,}2143 + 0{,}033947\ h$$
$$- 0{,}005752\ h$$

ou $u = 0{,}46209\ h\, l\ 25{,}2143 + 0{,}028195\ h$; d'où l'on tire la vîteſſe que l'on cherche, en opérant comme il ſuit.

$l.\ 25{,}2143 = 1{,}401647$

$l.\ 1{,}401647 = 0{,}146638$
$l.\ 2{,}202581 = 0{,}362215$
$l.\ 0{,}46209 = 9{,}664723$

$0{,}173576$ dont le nombre

eſt 1,491340
0,028195

1,519535

l. 1,519535 = 0,181710
lh = 7,463893

7,645603
dont la moitié = 3,822802
l. 4 = 0,602060

3,220742
la vîteſſe 1662 pieds de Rhin;
ou bien 1705 pieds anglois.

Comme ce nombre eſt de près de 100 pieds plus petit que celui qu'on a trouvé en faiſant abſtraction de la réſiſtance de l'air, il s'enſuit que la ſucceſſion de l'inflammation, & ce qui ſe perd de force, tant par la lumiere que par le vent de la balle, ne produiſent dans la vîteſſe qu'une diminution d'environ 60 pieds. Si l'on ſuppoſe donc $\lambda = 0,93$, il en réſultera une diminution de 40 pieds, & la perte occaſionnée par les autres cauſes, produira une diminution de 20 pieds.

HUITIEME REMARQUE.

Puiſque nous avons fait mention dans ces remarques, de toutes les circonſtances qui influent ſur le mouvement du mobile, avant qu'il ſoit hors du canon, nous n'abandonnerons point ce ſujet,

sujet, sans avoir examiné plus particuliérement l'influence de la lumiere & du vent sur la vitesse de la balle. Soit donc, comme ci-devant, la longueur totale du canon $AB = a$ (fig. 10); la longueur de l'espace AC occupé par la charge de poudre $= b$; &, pour ne point augmenter inutilement les difficultés, supposons qu'au premier instant de l'inflammation, il s'allume une quantité de poudre qui soit à la charge entiere, comme λ est à 1, & que l'inflammation ne s'étende pas plus loin; ensorte que la partie de la poudre qui ne prend point feu, occupe un espace dont la longueur $= (1 - \lambda)\, b$. Supposons en outre que la matiere grossiere contenue dans la poudre enflammée en soit la $\frac{\alpha - 1}{\alpha}$me. partie; laquelle, avec la poudre non enflammée, occupera un espace dont la longueur $= b - \frac{\lambda b}{\alpha}$. Nous admettrons aussi que les ouvertures, qui donnent un libre passage au fluide comprimé, font, prises ensemble, la $m$me. partie de l'orifice du canon, que nous exprimerons par cc; & pour n'avoir que la lumiere seule à considérer, nous la supposerons augmentée du vent de la balle, de maniere qu'on ait cette lumiere $ef = \frac{cc}{m}$. Cela posé, & la balle étant arrivée en MN, soit $AM = x$, & la vitesse avec laquelle la balle est chassée, aussi bien que la section $MN = \sqrt{v}$, de maniere que x devenant $x + dx$, v devienne $v + dv$. Si l'on exprime le poids de la balle par une colonne d'air d'une hauteur $= k$, la force nécessaire pour l'accélération de la balle sera $= \frac{k\, dv}{dx}$. D'un autre côté, si la matiere grossiere est n fois plus dense que l'air naturel,

Q

la force néceſſaire pour ſon accélération ſera $= \frac{1}{2} n \left(b - \frac{\lambda b}{\alpha}\right) \frac{dv}{dx}$. Maintenant, puiſque la balle n'eſt point chaſſée par toute la force dont la poudre étoit douée au commencement de l'inflammation, parce qu'une partie du fluide s'échappe par la lumiere ; nous ſuppoſerons que cette partie eſt à la totalité de la poudre enflammée, comme z eſt à 1, ou que cette partie eſt égale à une colonne d'air dont la hauteur $= 244 \lambda b z$. Ainſi, le reſte du fluide agiſſant contre le mobile, ſera $= 244 \lambda b (1 - z)$; & comme ce fluide occupe dans le canon un eſpace dont la longueur $= x - b + \frac{\lambda b}{\alpha}$, il s'enſuit qu'il eſt $\frac{244 \lambda b (1 - z)}{x - b + \frac{\lambda b}{\alpha}}$ fois plus denſe que l'air naturel. Pour abréger, nous mettrons s à la place de cette fraction, alors l'élaſticité de ce fluide ſera égale au poids d'une colonne d'air dont la hauteur $= \beta h \left(s + \frac{ss}{6q}\right)$, ainſi que nous l'avons fait voir plus haut. Or, pour l'accélération de ce fluide, il faut une force $= \frac{122 \lambda b (1 - z) dv}{dx}$, donc la force totale ſera $= \frac{dv}{dx} \left(k + \frac{1}{2} nb \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right) + 122 \lambda b (1 - z)\right)$, laquelle étant égale à la force abſolue de la poudre, moins la réaction de l'air h, & ſa réſiſtance $\frac{1}{2} v$, on a cette équation : $dv \left[k + \frac{1}{2} nb \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha}\right) + 122 \lambda b (1 - z)\right] = \beta h \left(s + \frac{ss}{6q}\right) dx - hdx - \frac{1}{4} vdx$. Pour déterminer la quantité z, nous ſuppoſerons que le fluide ſort par la lumiere ef avec une viteſſe $= \sqrt{u}$; ainſi, pendant que la

balle avance d'une quantité dx, il fortira par la lumiere un cylindre de ce fluide, dont la longueur $= \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$, & la bafe $= \frac{cc}{m}$; & comme ce fluide eft s fois plus denfe que l'air naturel; la perte de force occafionnée par la lumiere, équivaudra une colonne d'air dont la bafe $= cc$, & la hauteur $= \frac{s\,dx\sqrt{u}}{m\sqrt{v}}$; on aura donc $244\,\lambda b\,dz = \frac{s\,dx\sqrt{u}}{m\sqrt{v}}$; dont l'intégrale doit être prife de maniere qu'elle foit $= 0$, lorfque $x = b$. Il nous refte maintenant à déterminer la viteffe $\sqrt{u}$ qui dépend de la force expanfive du fluide; cette force étant égale au poids d'une colonne d'air naturel d'une hauteur $= \beta h \left(s + \frac{ss}{6q}\right)$, elle pourra auffi être exprimée par le poids d'une colonne d'air auffi denfe que le fluide, & dont la hauteur feroit $= \beta h \left(1 + \frac{s}{6q}\right)$; c'eft-à-dire, que la preffion fur la lumiere eft la même que fi elle fe faifoit par une colonne d'air s fois plus denfe que l'air naturel, dont la hauteur $= \beta h \left(1 + \frac{s}{6q}\right)$. Dans ce cas, le fluide fera chaffé par l'ouverture de la lumiere, avec la viteffe due à cette hauteur; d'où il fuit que $u = \beta h \left(1 + \frac{s}{6q}\right)$. On peut négliger ici la fraction $\frac{s}{6q}$, comme très-petite, & l'on aura $u = \beta h$; donc $244\,\lambda b\,dz = \frac{s\,dx\sqrt{\beta h}}{m\sqrt{v}}$. Mais $s = \frac{244\,\alpha\lambda b(1-z)}{\alpha x + (\lambda - \alpha) b}$, ou plutôt, (à caufe de $\alpha > 1$ & $\lambda < 1$), $s = \frac{244\,\alpha\lambda b(1-z)}{\alpha x - (\alpha - \lambda) b}$; Subftituant donc cette valeur de s, on aura $\frac{dz}{1-z} = \frac{\alpha\,dx\sqrt{\beta h}}{m(\alpha x - (\alpha - \lambda) b)\sqrt{v}}$;

Or, on a déjà trouvé ci-deſſus $dv\,(2\alpha k + nbd)(\alpha - \lambda) + 244\,\alpha\lambda b\,(1 - z)) = 2\alpha\beta h\,dz\left(s + \frac{ss}{6q}\right) - 2\alpha h dx - \alpha v dx$. Et ſi l'on néglige les trois derniers termes, non pas préciſément à cauſe de leurs valeurs, quoique très-petites, mais parce qu'ils ſe détruiſent à peu près par des ſignes contraires; on aura : $dv\left(2\alpha k + nb(\alpha - \lambda) + 244\,\alpha\lambda b\,(1 - z)\right) = \frac{488\,\alpha^2\beta\lambda bh(1-z)}{\alpha x - (\alpha - \lambda)b}\,dx$. Mais l'équation précédente donne $\frac{\alpha dx}{\alpha x - (\alpha - \lambda)b} = \frac{m\,dz\sqrt{v}}{(1 - z)\sqrt{\beta h}}$; on aura donc $dv\,(2\alpha k + nb\,(\alpha - \lambda) + 244\,\alpha\lambda b\,(1 - z)) = 488\,m\alpha\lambda b\,dz\sqrt{\beta h v}$, ou $dz + \frac{z\,dv}{2m\sqrt{\beta h v}} = \frac{dv(2\alpha k + nb(\alpha - \lambda) + 244\,\alpha\lambda b)}{488\,m\alpha\lambda b\sqrt{\beta h v}}$; multipliant cette équation par $e^{\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}$ pour la rendre intégrable, & en intégrant, on aura $e^{\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}\,z = \left(\frac{2\alpha k + nb(\alpha - \lambda)}{244\,\alpha\lambda b m} + \frac{1}{m}\right)\int e^{\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}\,\frac{dv}{2\sqrt{\beta h v}}$, ou $e^{\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}\,z = \left(\frac{2\alpha k + nb(\alpha - \lambda)}{244\,\alpha\lambda b} + 1\right)\left(e^{\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}} - 1\right)$, parce que la quantité z, qui exprime la perte de la force accélératrice, doit s'évanouir lorſque $v = 0$, c'eſt-à-dire, au premier inſtant inſenſible de l'exploſion; de là on tire $z = \frac{2\alpha k + nb(\alpha - \lambda) + 244\,\alpha\lambda b}{244\,\alpha\lambda b}\left(1 - e^{-\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}\right)$ & $1 - z = \frac{(2\alpha k + nb(\alpha - \lambda) + 244\,\alpha\lambda b)e^{-\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}} - 2\alpha k - nb(\alpha - \lambda)}{244\,\alpha\lambda b}$. De plus, $l\,(1 - z) = l\left[\left(1 + \frac{2\alpha k + nb(\alpha - \lambda)}{244\,\alpha\lambda b}\right)e^{-\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}} - \frac{2\alpha k - nb(\alpha - \lambda)}{244\,\alpha\lambda b}\right]$. Soit $\frac{2\alpha k + nb(\alpha - \lambda)}{244\,\alpha\lambda b}$

$= \mu$, on aura $l(1 - \zeta) = l\left((1 + \mu) e^{-\sqrt{v} : m\sqrt{\beta h}} - \mu\right)$ donc $\frac{d\zeta}{1-\zeta} = \frac{(1+\mu) e^{-\sqrt{v} : m\sqrt{\beta h}} dv : 2m\sqrt{\beta h v}}{(1+\mu) e^{-\sqrt{v} : m\sqrt{\beta h}} - \mu}$ $= \frac{(1+\mu) dv : 2m\sqrt{\beta h v}}{1 + \mu - \mu e^{\sqrt{v} : m\sqrt{\beta h}}}$. Et comme nous avons trouvé plus haut $\frac{\alpha dx}{\alpha x - (\alpha - \lambda) b} = \frac{d\zeta}{1-\zeta} \times \frac{m\sqrt{v}}{\sqrt{\beta h}}$, nous aurons $\frac{2\alpha\beta h dx}{\alpha x - (\alpha - \lambda) b} = \frac{(1+\mu) dv}{1 + \mu - \mu e^{\sqrt{v} : m\sqrt{\beta h}}}$. Mais m étant ordinairement un très-grand nombre, ce qui rend la fraction $\frac{\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}}$ très-petite; on aura, à peu près, $e^{\sqrt{v} : m\sqrt{\beta h}} = 1 + \frac{\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}}$; & cette valeur, ſubſtituée dans l'équation précédente, donnera $\frac{2\alpha\beta h dx}{\alpha x - (\alpha - \lambda) b} = \frac{m(1+\mu) dv \sqrt{\beta h}}{m\sqrt{\beta h} - \mu\sqrt{v}}$, ou, à cauſe de $\frac{m\sqrt{\beta h}}{m\sqrt{\beta h} - \mu\sqrt{v}} = 1 + \frac{\mu\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}}$, $\frac{2\alpha\beta h dx}{\alpha x - (\alpha - \lambda) b} = (1 + \mu) dv + \frac{\mu(1+\mu) dv \sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}}$, dont l'intégrale eſt $2\beta h l \frac{\alpha x - (\alpha - \lambda) b}{\lambda b} = (1 + \mu) v + \frac{2\mu(1+\mu) dv \sqrt{v}}{3m\sqrt{\beta h}}$; de ſorte que ſi rien ne ſe perdoit par la lumiere (15), on auroit $(1 + \mu) v = 2\beta h l \frac{\alpha x - (\alpha - \lambda) b}{\lambda b}$: d'où l'on voit que, dans le cas préſent, il y a diminution de vîteſſe. Pour la déterminer, nous ſuppoſerons que la vîteſſe de la balle, lorſqu'il ne ſe perd rien du fluide agiſſant par la lumiere, eſt $= \sqrt{u}$, & qu'elle eſt $= \sqrt{v}$ lorſqu'une partie de ce fluide s'échappe par la lumiere; d'ou réſulte cette équa-

(15) c'eſt-à-dire, ſi m eſt un nombre infiniment grand.

tion $u = v + \frac{2\mu v \sqrt{v}}{3m\sqrt{\beta h}}$, & de celle-ci par approximation, $v = u - \frac{2\mu u \sqrt{u}}{3m\sqrt{\beta h}}$, donc $\sqrt{v} = \sqrt{u} - \frac{\mu u}{3m\sqrt{\beta h}}$ & $\sqrt{v} : \sqrt{u} :: 1 - \frac{\mu \sqrt{u}}{3m\sqrt{\beta h}} : 1$. Maintenant, si l'on exprime $\sqrt{u}$ par le nombre de pieds que cette vîtesse feroit parcourir en une seconde, on aura $\sqrt{\beta h} = 2700$ pieds, donc $\sqrt{v} : \sqrt{u} :: 1 - \frac{\mu \sqrt{u}}{8100 m} : 1$; mais $\mu = \frac{2\alpha k + nb(\alpha - \lambda)}{244 \alpha \lambda b}$; ainsi si la balle, dans le cas où il n'y auroit point de perte de force, avoit une vîtesse de 1700 pieds par seconde, il y auroit, dans le cas contraire, une diminution de $\frac{17\mu}{81m}$. 1700 pieds en une seconde. Dans notre exemple, où $b = 2,625$; $k = 4900$; $n = 1000$; $\alpha = \frac{1}{2}$ & $\lambda = \frac{9}{10}$, on a $\mu = 18,822$. Cette diminution est de $\frac{310}{81m}$. 1700, ou de $\frac{6715}{m}$ pieds. Si l'on suppose donc que l'ouverture de la lumiere soit la centieme partie de celle du canon, la vîtesse sera diminuée de 67 pieds par seconde, & la balle, au lieu de 1700 pieds, n'aura plus qu'une vîtesse de 1633 pieds par seconde. Mais il est à remarquer que la valeur que nous venons de trouver pour le déchet produit par la lumiere, est un peu trop grande, attendu que, dans l'intégration ci-dessus, nous avons négligé quelques termes qui auroient pu diminuer cette valeur; d'où résulte une erreur d'autant plus grande, que la lumiere a une plus grande ouverture, ou que le nombre m est plus petit, car l'approximation que nous avons employée ne peut avoir lieu, que lorsque m est un très-grand nombre. Ceci paroît aussi très-évident par l'ex-

preſſion $\frac{6715}{m}$ que nous venons de trouver, car ſi, par exemple, m ne valoit que 3, la diminution de viteſſe occaſionnée par la lumiere, ſeroit de 2238 pieds par ſeconde; mais comme la viteſſe totale n'eſt que de 1700 pieds, on voit bien que cette diminution ne peut aller à beaucoup près à 1700 pieds : il eſt donc évident que lorſque m n'eſt pas un très-grand nombre, la méthode que nous venons d'employer donne toujours un déchet ſenſiblement trop grand. C'eſt pourquoi ayant pris dans notre exemple $m = 100$, il en doit sûrement réſulter un déchet de moins de 60 pieds. Il eſt d'ailleurs une autre raiſon qui a dû faire trouver ce déchet trop conſidérable ; c'eſt que nous avons ſuppoſé que le fluide élaſtique qui s'échappe par la lumiere, étoit dans toute ſa pureté : or il n'eſt pas douteux qu'une portion de la matiere groſſiere ne ſorte auſſi par cette ouverture, & qu'ainſi la force impulſive n'eſt point autant affoiblie qu'on l'a ſuppoſé dans le calcul, car ayant moins de parties groſſieres à chaſſer avec la balle, celle-ci en reçoit d'autant plus de viteſſe. Mais il eſt aiſé d'avoir égard à cette derniere cauſe, en ſuppoſant, dans la formule trouvée, l'ouverture compoſée de la lumiere & du vent de la balle, un peu plus petite qu'elle n'eſt réellement. Afin de corriger la premiere erreur, correction qui eſt indiſpenſable quand m n'eſt pas un très-grand nombre, il faudra prendre une valeur plus approchée de $e^{\sqrt{v}:m\sqrt{\beta h}}$, qui deviendra $= 1 + \frac{\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}} + \frac{v}{2m^2\beta h} + \frac{v\sqrt{v}}{6m^3\beta h\sqrt{\beta h}} +$ &c. on aura donc

$$\frac{2\alpha\beta h\,dx}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b} = \frac{(1+\mu)\,dv}{1-\frac{\mu\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}}-\frac{\mu v}{2m^2\beta h}-\frac{\mu v\sqrt{v}}{6m^3\beta h\sqrt{\beta h}}-\&c},$$

ou, en effectuant la division de 1 par le dénominateur du second nombre $\frac{2\alpha\beta h\,dx}{\alpha x-(\alpha-\lambda)b} = (1+\mu)\,dv\left(1+\frac{\mu\sqrt{v}}{m\sqrt{\beta h}}+\frac{(\mu^2+\frac{1}{2}\mu)v}{m^2\beta h}+\frac{(\mu^3+\mu^2+\frac{1}{6}\mu)v\sqrt{v}}{m^3\beta h\sqrt{\beta h}}\right)$. Supposant donc $\sqrt{u}$ pour la vîtesse de la balle, si une partie de la force ne se perdoit point par la lumiere, on aura $u = v + \frac{2\mu v\sqrt{v}}{3m\sqrt{\beta h}} + \frac{(2\mu^2+\mu)v^2}{4m^2\beta h} + \frac{(6\mu^3+6\mu^2+\mu)v^2\sqrt{v}}{15m^3\beta h\sqrt{\beta h}}$; d'où l'on tire, par la méthode du retour des suites, $\sqrt{v} = \sqrt{u} - \frac{\mu u}{3m\sqrt{\beta h}} + (\frac{1}{36}\mu^2 - \frac{1}{8}\mu)\frac{u\sqrt{u}}{m^2\beta h} + (\frac{1}{270}\mu^3 + \frac{1}{20}\mu^2 - \frac{1}{30}\mu)\frac{uu}{m^3\beta h\sqrt{\beta h}}$. Et comme $\sqrt{\beta h}$ exprime une vîtesse de 2700 pieds, si l'on réduit pareillement $\sqrt{u}$ en pieds, & que, pour abréger, on fasse la fraction $\frac{\sqrt{u}}{m\sqrt{\beta h}} = r$, on aura $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} = 1 - \frac{1}{3}\mu r + (\frac{1}{36}\mu^2 - \frac{1}{8}\mu)r^2 + (\frac{1}{270}\mu^3 + \frac{1}{20}\mu^2 - \frac{1}{30}\mu)r^3$. Mais dans l'exemple précédent, $\mu = 18$ & $r = \frac{17}{27m}$, donc $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} = 1 - 3{,}9506.\frac{1}{m} + 2{,}9685.\frac{1}{m^2} + 1{,}5865.\frac{1}{m^3}$. Cette formule peut servir toutes les fois que m n'est pas un trop grand nombre, par exemple, lorsqu'il est un peu moindre que 60; car si $m = 60$, le troisieme terme $2{,}9685.\frac{1}{m^2}$ multiplié par $\sqrt{u} = 1700$, ne donne qu'environ 1 pied. Soit $m = 10$, c'est-à-dire, que

l'ouverture compoſée de la lumiere & du vent de la balle ſoit la dixieme partie de l'ouverture du canon, on aura $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} = 0,63621$, ce qui donne une diminution de 618 pieds par ſeconde; de ſorte que la vîteſſe de la balle n'eſt plus que de 1082 pieds par ſeconde. Au reſte, il eſt à remarquer que, puiſque $\mu = \frac{2\alpha k + nb(\alpha - \lambda)}{244\alpha\lambda b}$, la diminution dont il s'agit doit être d'autant plus grande, que le mobile eſt plus peſant, ou que la quantité k a une plus grande valeur. Ceci renverſe un des principaux appuis du ſyſtême de l'Auteur ſur l'inſtantanéité de l'inflammation de la poudre, car il prétend que ſi une charge de poudre ne s'allumoit point toute à la fois dans le même inſtant, deux ou trois balles miſes enſemble dans le canon, recevroient à proportion plus de viteſſe qu'une ſeule, parce que ces balles, reſtant plus long-temps dans le fuſil, donneroient à la poudre le temps de s'allumer en plus grande quantité, & par conſéquent d'agir ſur elles avec plus de force : mais aucune de ſes expériences ne vient à l'appui de cette opinion. Au reſte, le raiſonnement de l'Auteur ſeroit exact, & prouveroit en effet ce qu'il avance, ſi la circonſtance que nous venons d'éclaircir touchant la lumiere, n'avoit pas lieu : car puiſque, d'après ce qui vient d'être dit, un mobile plus peſant occaſionne d'une part un déchet plus conſidérable par la lumiere, & de l'autre, une inflammation plus complette, il peut ſe faire que ces deux effets oppoſés ſe compenſent mutuellement, ou que leur différence ſoit ſi peu ſenſible, qu'elle échappe à l'obſervation. En raiſ-

femblant toutes ces remarques, on pourra, dans chaque cas particulier, non-feulement affigner les caufes de toutes les circonftances qui fe préfenteront, mais encore déterminer d'avance par le calcul, la viteffe avec laquelle les boulets font chaffés de leurs pieces refpectives.



PROPOSITION XII.

Trouver la vîtesse avec laquelle une balle est chassée, lorsqu'il y a un intervalle considérable entre elle & la charge de poudre.

DANS les diverses expériences rapportées jusqu'à présent, la balle n'étoit point posée immédiatement sur la poudre ; il y avoit entre deux un petit intervalle, mais qui n'a jamais eu plus d'un pouce & demi de longueur ; & nous avons trouvé que, dans ce cas, notre théorie s'accordoit assez bien avec l'expérience. Mais lorsque cet intervalle est plus considérable, comme de 12, 18 ou 24 pouces, les principes que nous avons employés dans la septieme Proposition, où nous avons supposé que la balle touchoit la poudre, ou en étoit très-peu éloignée, ne peuvent plus avoir lieu : car dans la derniere Proposition, nous avons vu que lorsque la flamme ne rencontre point d'obstacle, elle se dilate avec beaucoup plus de vîtesse, qu'elle n'est capable d'en communiquer à une balle. Ainsi, comme par la libre dilatation de la flamme à travers un espace de 12, 18 ou 24 pouces, elle acquiert déjà un degré assez considérable de cette vîtesse, le premier mouvement de la balle ne vient pas seulement de la simple pression du fluide élastique, mais encore du choc que la balle en reçoit ; de maniere qu'il en résultera un plus grand degré de vîtesse, que l'on ne pourra déterminer qu'en considérant ensemble

l'effet du choc, & celui de la pression de la poudre enflammée.

Il suit de là que la vîtesse de la balle, lorsqu'elle est placée à une distance considérable de la poudre, est beaucoup plus grande que celle qu'on a déduite, par les principes de la septieme Proposition, de la seule force expansive de la poudre. Cette augmentation de vîtesse, outre qu'elle est conforme à la théorie, a été pleinement confirmée par l'expérience : nous avons trouvé, par exemple, qu'une balle placée dans le canon désigné par la lettre A, à 11 $\frac{1}{4}$ pouces du fond de l'ame, & chassée par 12 dragmes de poudre, avoit reçu une vîtesse de 1400 pieds par seconde, tandis que la même balle mise en mouvement par la seule pression du fluide, n'eût reçu qu'une vîtesse de 1200 pieds. La même chose a eu lieu avec toutes les autres charges, & avec de plus grands intervalles entre la poudre & la balle, (même pour des distances moindres, mais, dans ce cas, la différence étoit moins sensible). Ceci s'accorde assez bien avec ce qui a été dit dans la Proposition précédente, touchant la vîtesse avec laquelle les parties subtiles & grossieres de la flamme se dilatent.

Une autre conséquence que l'on peut tirer de là, & qui est d'une très-grande importance dans la pratique de l'Artillerie, c'est qu'on doit éviter avec soin de placer le projectile à une trop grande distance de la poudre, à moins que le canon ne soit extrêmement fort : car, lorsque la poudre enflammée n'atteint la balle qu'après s'être dilatée à travers l'espace vuide qui les sépare, il faudra que la flamme, à cause de la vîtesse acquise, s'accumule derriere la balle,

d'où résultera un degré de compression qui fera infailliblement crever le canon, s'il n'a point une force extraordinaire à cet endroit-là. C'est ce que j'ai expérimenté avec un canon de mousquet d'un fer très-doux & liant : l'ayant chargé avec 12 dragmes de poudre, & placé la balle à 16 pouces du fond, le canon, après le coup, s'enfla du double immédiatement derriere la balle, comme une vessie soufflée, & il s'en détacha en outre deux éclats d'environ deux pouces de longueur.

Le mouvement d'une balle placée à quelque distance de la poudre, étant produit par deux forces qui agissent sur elle, savoir : premiérement, par le choc de la poudre enflammée, dont la force dépend de la vîtesse que la flamme a actuellement acquise par son expansion ; & en second lieu, par sa pression continuée, en vertu de laquelle la balle est chassée le long du reste du canon. J'ai été obligé, pour connoître l'effet de chacune de ces deux forces, de les séparer l'une de l'autre, & de ne considérer que la derniere. Pour cet effet, je ne rassemblai point toute la poudre au fond de l'ame, mais, pour éviter le choc, je l'étendis de façon qu'elle occupât uniformément tout l'espace derriere la balle, persuadé que, par ce moyen, la vîtesse de la flamme seroit affoiblie à chaque endroit, par la raréfaction des parties voisines. Le canon étant ainsi chargé, & la balle placée à 11 $\frac{1}{4}$ pouces du fond, sa vîtesse, au lieu de 1400 pieds trouvés par l'expérience précédente, ne fut que de 1100 pieds par seconde, & par conséquent de 100 pieds moindre que par la théorie, pour

la même quantité de poudre & la même balle, chargées à l'ordinaire.

La cauſe de cette diminution ne vient ſans doute que du mouvement interne de la flamme : car la poudre étant répandue dans un eſpace qu'elle ne pouvoit entiérement remplir, il en devoit néceſſairement réſulter des chocs & des réflexions en tous ſens ; & ces différentes agitations dans les parties du fluide, ne pouvoient qu'affoiblir ſa preſſion contre les parois du canon & contre la balle. Afin de prévenir ces irrégularités, j'ai toujours eu ſoin, dans toutes mes autres expériences, de bien raſſembler la poudre, & d'en rapprocher les grains autant qu'il étoit poſſible, lors même que la balle en étoit un peu éloignée.

REMARQUE.

La recherche qui fait l'objet de cette Propoſition, eſt une des plus difficiles que l'on puiſſe propoſer ſur le mouvement des fluides. Si on vouloit la traiter à fond, on s'appercevroit bientôt que les principes connus de l'analyſe & de la ſcience, à laquelle cette queſtion appartient, ne ſuffiſent point pour vaincre toutes les difficultés qui s'y rencontrent. Il s'agit d'examiner l'effet de la poudre, lorſque la balle ne poſe pas immédiatement ſur la charge, & qu'il y a un eſpace vuide entre deux. Si cet eſpace eſt abſolument vuide d'air, le fluide dégagé, par l'inflammation, des grains de poudre où il étoit fortement comprimé, s'étendra librement, juſqu'à ce que ſes parties les plus avancées aient

atteint la balle. Il ne sera pas difficile, dans ce cas, de déterminer la force expansive du fluide comprimé, au moment qu'il commence à agir sur le mobile, ainsi que la vitesse de ses différentes parties, en observant les regles données ci-devant. Et comme le mouvement de la balle est produit par deux causes, savoir, par la force expansive du fluide comprimé, qui la pousse continuellement jusqu'à ce qu'elle soit hors du canon, & par l'effort du choc, dont l'action n'est que momentanée, on pourroit facilement, comme on l'a déjà fait, connoître l'effet de la premiere par les principes qu'on vient d'établir. Il n'en est pas de même de la seconde, elle comporte de très-grandes difficultés, & quoiqu'il paroisse d'abord que, ne s'agissant ici que de la communication du mouvement par le choc, matiere suffisamment éclaircie par plusieurs Auteurs, on ne devroit rien y trouver d'embarrassant. Si l'on considere néanmoins que, dans le choc des corps, il faut connoître la masse & la vîtesse du corps choquant, on conviendra sans peine que, dans la présente question, ces deux points sont très-difficiles à déterminer : car, puisque le corps choquant n'est ici autre chose que le fluide qui se raréfie, on ne peut prendre, ni toute la quantité de fluide contenu dans la poudre pour la masse du corps choquant, ni la vitesse des parties antérieures pour sa vîtesse. Pour rendre ceci plus sensible, que l'on fasse attention qu'aussi-tôt que les parties antérieures du fluide comprimé choquent la balle, les autres plus éloignées ne peuvent contribuer à ce choc, que par la communication, & par conséquent par la perte d'une partie de leur mouvement;

& comme elles en conſervent encore ; c'eſt comme ſi le choc ne ſe faiſoit que par une portion du fluide comprimé, & que l'autre n'y contribuât en rien. Mais quelle eſt cette portion, que l'on peut regarder comme inutile ? C'eſt-là préciſément le nœud de la difficulté. Il ſemble néanmoins qu'on ne s'écartera pas beaucoup de la vérité, en prenant la moitié ou le tiers pour cette portion. Nous ſuppoſerons donc que la balle eſt d'abord placée en ZZ (fig. 9.) & que la charge de poudre occupe l'eſpace AC. Nommant $AC = b$; $AZ = f$; le poids de la poudre ſera à peu près égal à celui d'une colonne d'air d'une hauteur $= 1000\,b$, en admettant que la poudre eſt 1000 fois plus peſante que l'air. Ainſi, la moitié de cette quantité agira ſur la balle, dont nous exprimerons le poids par celui d'une colonne d'air d'une hauteur $= k$. Or, la flamme, quand elle ſera parvenue en ZZ, aura acquis une vîteſſe due à la hauteur $= \frac{2\alpha}{n(\alpha-\lambda)+244\alpha\lambda} \cdot 244\,\beta\lambda h\, l\, \frac{\alpha f-(\alpha-\lambda)b}{\lambda b}$; expreſſion dans laquelle $\alpha = \frac{3}{2}$; $n = 1000$; $244\,\beta = 1000$, & $\lambda =$ à la partie enflammée de la poudre : nous ſuppoſerons ici $\lambda = \frac{9}{10}$; h eſt la hauteur d'une colonne d'air dont le poids eſt égal à la force élaſtique de l'air commun. Donc cette hauteur, qui donne la vîteſſe de la flamme en Z, eſt $= \frac{90}{31}\, h\, l\, \frac{5f-2b}{3b}$, & cette vîteſſe elle-même $= \sqrt{\frac{90}{31}\, h\, l\, \frac{5f-2b}{3b}}$. Maintenant, puiſque la balle étoit d'abord en repos, on établira, par les regles connues, l'analogie ſuivante : la ſomme des deux corps, $500\,b + k$, eſt au corps choquant $500\,b$, comme la vîteſſe du corps choquant

quant $\sqrt{\frac{90}{31} h l \frac{5f-2b}{3b}}$, eſt à la vîteſſe commune des deux corps après le choc ; la vîteſſe de la balle après le choc ſera donc $= \frac{500b}{k+500b} \sqrt{\frac{90h}{31} l \frac{5f-2b}{3b}}$. Si l'on avoit pris une partie de la charge de poudre moindre que ſa moitié, il auroit auſſi fallu, au lieu de $500b$, prendre une quantité moindre : prenons $310b$, l'expreſſion $k + 310b$ donnera préciſément le même dénominateur $\alpha(2k+nb) - (n-244\alpha)\lambda b$, trouvé dans la ſeptieme remarque de la Propoſition précédente (16); d'où l'on peut inférer que le nombre $310b$ indique la véritable partie qu'il falloit prendre. La hauteur qui donne la vîteſſe de la balle ſera donc exprimée par $\frac{310 \cdot 900 b^2 h}{(k+310b)^2} l \frac{5f-2b}{3b} = \frac{279000 b^2 h}{(k+310b)^2} l \frac{5f-2b}{3b}$.

Mais ſi la balle avoit d'abord été placée immédiatement contre la poudre, elle auroit eu en ZZ une vîteſſe due à une hauteur $= \frac{900bh}{k+310b} l \frac{5f-2b}{3b}$; Cette vîteſſe eſt donc à l'autre comme 1 eſt à $\sqrt{\frac{310b}{k+310b}}$. Ainſi, la vîteſſe que la balle reçoit par le choc, eſt beaucoup moindre que

(16) C'eſt-à-dire que dans la fraction $\frac{2\alpha b}{\alpha(2k+nb)-(n-244\alpha)\lambda b}$, qu'on a ſuppoſée $= m$ page 237, le dénominateur ſe réduit à $k + 310b$, en faiſant $\alpha = \frac{1}{2}$; $n = 1000$, & $\lambda = \frac{9}{10}$; ce qui donne effectivement $m = \frac{b}{k+310b}$, & fait préſumer à l'Auteur que $310b$ pourroit bien être la véritable maſſe de la partie du fluide qui choque la balle.

celle qu'elle auroit acquise en ZZ, si elle eût d'abord été contiguë à la poudre. Si c'est donc là en effet la vîtesse communiquée à la balle par le choc, il ne sera pas difficile de déterminer celle qu'y ajoute ensuite la force expansive : il ne faut, pour cet effet, que reprendre l'équation ci-dessus, laquelle, en rejetant les moindres termes, & substituant les valeurs de λ, β & n, se réduit à $v = \frac{900bh}{k+310b}\ l\ \frac{5x-2b}{3b}$ + une constante telle que x étant $= f$, la hauteur v devienne $\frac{279000b^2h}{(k+310b)^2}\ l\ \frac{5f-2b}{3b}$. Soit donc v la hauteur qui donne la vîtesse de la balle arrivée en MM, & $AM = x$, on aura pour cet endroit l'équation $v = \frac{900bh}{k+310b}\ l\ \frac{5x-2b}{3b}$ + C. Maintenant, pour déterminer la constante C, on supposera $x = f$, & $v = \frac{279000b^2h}{(k+310b)^2}\ l\ \frac{5f-2b}{3b}$, on aura $\frac{279000b^2h}{(k+310b)^2}\ l\ \frac{5f-2b}{3b} = \frac{900bh}{k+310b}\ l\ \frac{5f-2b}{3b}$ + C, donc $C = \frac{-900bkh}{(k+310b)^2}\ l\ \frac{5f-2b}{3b}$, ce qui donne $v = \frac{900bh}{k+310b}\ l\ \frac{5f-2b}{3b} - \frac{900bkh}{(k+310b)^2}\ l\ \frac{5f-2b}{3b}$.

Mais si la balle n'eût point reçu de choc en ZZ, & qu'elle n'eût été chassée qu'en vertu de la force expansive, on auroit $C = \frac{-900bh}{k+310b}\ l\ \frac{5f-2b}{3b}$, & , dans ce cas, $v = \frac{900bh}{k+310b}\ l\ \frac{5x-2b}{3b} - \frac{900bh}{k+310b}\ l\ \frac{5f-2b}{3b}$; & si la balle eût été contiguë à la poudre, on auroit eu $v = \frac{900bh}{k+310b}\ l\ \frac{5x-2b}{3b}$.

Que l'on mette maintenant la longueur du canon, ou a à la place de x, & qu'on substitue les valeurs prises dans l'exemple de l'Auteur, savoir : $a = 45$; $b = 2,625$; $f = 11,25$; $k = 4900$, & $lh = 7,463893$, on déterminera les trois différentes vîtesses qu'on vient de trouver, de la maniere suivante :

$\frac{900b}{k+310b} = \frac{236250}{571375}$; $\frac{900bk}{(k+310b)^2} = \frac{490000}{571375} \cdot \frac{236250}{571375}$; ou

$\frac{900b}{k+310b} = 0,41348$; $\frac{900bk}{(k+310b)^2} = 0,35459$.

& $\frac{5x-2b}{3b} = 27,905$; $\frac{5f-2b}{3b} = 6,476$

par conséquent $l.\ 27,905 = 1,445678$

$l.\ 6,476 = 0,811319$

$l.\ 1,445678 = 0,160072$

$l.\ 0,811319 = 9,909192$

ajoutant 0,362215 à l'un & à l'autre, on aura :

$l.\left(l\ \frac{5x-2b}{3b}\right) = 0,522287$

$l.\left(l\ \frac{5f-2b}{3b}\right) = 0,271407$

on aura donc $\frac{900b}{k+310b}\ l\ \frac{5x-2b}{3b} = 1,376391$

$\frac{900b}{k+310b}\ l\ \frac{5f-2b}{3b} = 0,772435$

$\frac{900bk}{(k+310b)^2}\ l\ \frac{5f-2b}{3b} = 0,662421$

d'où l'on voit que quand la balle est contiguë à la charge de poudre, on a $v = 1,376391\ h$; ce qui donne une vîtesse de 1582 pieds par seconde. Si la balle est d'abord placée en ZZ, &

la poudre tellement répandue dans l'efpace AZ, qu'il n'en puiffe réfulter aucun choc contre la balle, on aura $v = 0,60395\ h$, & une viteffe de 1048 pieds; enfin, fi la balle placée en ZZ eft choquée par la poudre, on aura $v = 0,71397\ h$, qui donne une vîteffe de 1140 pieds par feconde.

Mais il eft à remarquer que la formule d'où ces vîteffes font déduites eft un peu trop petite, & qu'ainfi les nombres qui les expriment, doivent être augmentés de quelque chofe. D'ailleurs, il eft évident que la vîteffe trouvée pour le dernier cas, lorfque la balle eft mife en mouvement par le choc de la poudre, eft beaucoup plus petite qu'il n'eft indiqué par l'expérience: car fi l'on fait attention aux circonftances qui doivent accompagner ce choc, on verra aifément que, dans cet inftant, le fluide doit s'accumuler derriere la balle, y acquérir par conféquent un plus grand degré d'élafticité, & la balle en recevoir un plus grand degré de vîteffe. A l'égard du gonflement du canon & des éclats qui s'en font détachés, voici quelle en eft la caufe : la vîteffe communiquée au mobile par le moyen du choc eft telle, qu'il faudroit une force prodigieufe pour en communiquer, dans le même temps, une pareille par la fimple preffion ; & nous ne croyons pas trop dire, en avançant qu'une force décuple de la force élaftique de la poudre, feroit à peine capable de produire un pareil effet. Or, un canon ou un moufquet n'a qu'autant de force qu'il en faut pour réfifter à un peu plus que l'effort ordinaire de la poudre. On ne doit donc point être étonné

qu'un canon de fusil ordinaire ne puisse résister à cette augmentation de force; qu'il creve ou s'élargisse, comme il est arrivé dans l'expérience de l'Auteur.

Si la balle n'eût point reçu ce choc, sa vîtesse, suivant notre calcul, eût été de 1048 pieds de Rhin, ou de 1081 pieds de Londres par seconde, ce qui s'accorde d'autant mieux avec le résultat de l'expérience, qui est de 1100 pieds, que notre formule est un peu trop petite. Si donc l'Auteur a trouvé, pour ce cas, une vîtesse de 1200 pieds, cela ne peut venir que d'une erreur du calcul, ou, ce qui est plus vraisemblable, du peu de justesse de sa théorie, attendu qu'il n'y a point considéré la force accélératrice de la flamme. Cela étant ainsi, la maniere dont il prétend rendre raison de la diminution de vîtesse, lorsqu'il n'y a point de choc, n'est d'aucune valeur, la cause qu'il donne de cette diminution ne pouvant point produire l'effet qu'il lui attribue : car quoiqu'il soit bien vrai que la force expansive d'un fluide élastique soit diminuée, lorsque ses parties sont agitées entre elles par un mouvement interne, néanmoins il est aisé de voir que ce mouvement interne dans la flamme, lorsque la poudre est répandue dant tout l'espace qui est derriere la balle, doit cesser aussi-tôt qu'elle commence à agir sur la balle.

Nous avons supposé, dans cette Remarque, que l'espace compris entre la poudre & la balle, lorsqu'il y a un intervalle entre deux, étoit absolument vuide ; mais comme il s'y trouve toujours de l'air naturel, il y aura quelques

changemens à faire dans nos résultats : car aussitôt que la flamme commence à s'étendre après l'explosion, l'air compris entre la balle & la poudre y est condensé, & acquiert par-là une force capable de chasser la balle avant que la flamme l'ait atteint pour la choquer immédiatement; de là vient sans doute que la balle a une vitesse plus grande que nous ne l'avons trouvée par le calcul précédent.



Digitized by Google

PROPOSITION XIII.

De la comparaison des différentes especes de Poudre, & de la meilleure maniere d'en faire l'épreuve.

LA poudre que nous avons considérée jusqu'à présent, est de celle qu'on emploie ordinairement pour le service du gouvernement : mais il en est de plusieurs autres especes, dont la qualité est plus ou moins bonne. Je me propose de comparer ensemble toutes celles dont j'ai pu avoir connoissance.

Je dois avertir d'abord que la poudre que l'on fabrique pour le gouvernement, quand elle est bien préparée, est, selon moi, aussi parfaite qu'elle puisse l'être pour l'usage ordinaire. Je l'ai examinée avec un soin particulier, & l'ayant comparée avec les autres especes de poudre qui se font en Angleterre, & qui passent pour être de la meilleure qualité, je n'y ai trouvé aucune différence sensible. Je l'ai aussi comparée par plusieurs expériences avec une certaine poudre espagnole, trouvée à bord du vaisseau *le Saint-Jago*. Celle-ci m'a paru à la vérité être d'une meilleure qualité, mais la différence, qui n'est que d'un cinquantieme ou un soixantieme, est trop petite pour qu'on en puisse être entiérement assuré. Si je compare aussi d'autres épreuves avec les miennes, je trouve que la poudre de France differe très-peu de la nôtre ; je ne puis cependant rien dire de positif à ce sujet, n'ayant jamais pu me procurer de cette poudre. Au reste,

on se souviendra qu'en parlant de la poudre de notre gouvernement, j'entends celle où le mélange des matieres est fait avec soin, & dans les proportions ordonnées : car c'est l'espece de poudre dont j'ai fait usage dans mes expériences.

La plus forte poudre que j'aie eu occasion d'éprouver, est d'une espece qu'on m'a dit avoir été faite en Hollande. Sa force est à celle de notre poudre de gouvernement, à peu près comme 5 est à 4. Il n'entre sans doute, dans la composition de cette poudre, que des matieres bien choisies & parfaitement purifiées ; peut-être y mêle-t-on aussi quelqu'esprit bien rectifié; mais l'on ne pourroit pas en faire une grande quantité sans des frais considérables, dont on ne seroit pas dédommagé par l'augmentation de la force.

La meilleure poudre que je connoisse après celle-ci, se fabrique en Portugal, sous la direction d'un Hollandois, qui a établi, il y a quelques années, des moulins à poudre près de Lisbonne. Quoique cette espece de poudre ne soit pas tout-à-fait aussi forte que celle de Hollande, elle en approche cependant plus que notre poudre de gouvernement.

La poudre commune qui entre dans le commerce, & se vend en Angleterre chez tous les Epiciers, est non-seulement beaucoup plus foible que la poudre de gouvernement ou de bataille, mais il s'y trouve encore une très-grande variété, selon les différens caprices de ceux qui la fabriquent. J'en ai éprouvé de plusieurs especes, dont la force n'étoit qu'environ les deux tiers de celle de notre poudre de guerre; il s'en trouve même

qui eſt encore plus foible. Mais la plus mauvaiſe de toutes eſt celle que l'on deſtine au commerce d'Afrique, & que l'on nomme communément poudre de guinée. Au reſte, ces ſortes de poudre ne valent pas la peine d'être examinées, attendu qu'on n'obſerve aucune regle certaine dans leur compoſition.

Les différences dans la bonté de la poudre dépendent principalement de trois cauſes : premiérement, de la qualité des matieres qui entrent dans ſa compoſition ; en ſecond lieu, de la quantité de ces matieres, ou de la proportion de leurs doſes ; troiſiémement, de la manipulation, ou de la maniere dont elles ſont préparées & miſes en œuvre.

La poudre eſt compoſée, comme tout le monde ſait, de ſalpêtre, de ſoufre & de charbon. De ces trois ſubſtances, le ſoufre & le charbon ſont celles qui coûtent le moins ; & quoiqu'il y ait du choix, il y a ſi peu de différence dans les prix, eu égard aux autres frais de fabrication, que ce ſeroit bien mal entendre ſes intérêts, que de s'expoſer à gâter de la poudre, qui d'ailleurs ſeroit bonne, en voulant économiſer ſur le ſoufre & le charbon.

Le ſalpêtre eſt ce qui coûte le plus dans la compoſition de la poudre, auſſi eſt-ce par-là qu'elle manque le plus communément. Le ſalpêtre n'eſt autre choſe qu'une ſubſtance qui ſe joint à la terre, & s'y forme par le concours de l'air : car ſi une quantité de terre, dont on a déjà extrait le ſalpêtre, eſt de nouveau expoſée à l'air pendant quelque temps, il s'y en formera encore, & cela, auſſi ſouvent que l'on voudra répéter l'expérience.

Le falpêtre eſt de lui-même une matiere incombuſtible ; expoſé au feu le plus violent, il entre ſeulement en fuſion, ſans s'allumer, à moins qu'on n'y mêle quelqu'autre matiere inflammable; alors, quoiqu'incombuſtible par lui-même, il augmente prodigieuſement l'activité du feu dans les matieres inflammables qu'il touche, & produit un effet beaucoup plus conſidérable que l'air pouſſé ſur le feu par le moyen d'un ſoufflet.

La poudre étant donc compoſée d'abord de ſoufre & de charbon, qui ſont deux ſubſtances inflammables, & enſuite de ſalpêtre, qui eſt une matiere incombuſtible, il eſt clair que ſi la doſe de celui-ci eſt trop forte, eu égard à celles des deux autres, leur inflammation ne ſuffira point pour conſumer tout le ſalpêtre. Dans ce cas, le feu n'aura point aſſez d'activité, & la poudre, comme on l'a obſervé dans la dixieme Propoſition, ne ſera point auſſi forte que ſi l'on en ôtoit une partie du ſalpêtre, & qu'on le remplaçât par deux parties égales de ſoufre & de charbon. Si au contraire on met moins de ſalpêtre qu'il n'en peut facilement être conſumé par les deux autres ſubſtances, le feu ne ſera point auſſi violent qu'il devroit l'être, il manquera de cette vivacité qu'y ajouteroit une plus forte doſe de ſalpêtre.

Ce n'eſt donc point par la quantité de ſalpêtre, que l'on doit juger de la bonté de la poudre. Il eſt bien vrai que le ſalpêtre eſt l'ame de la poudre, & qu'il fournit ſeul ce fluide élaſtique qui en fait toute la force; mais comme le développement de ce fluide, & la force expanſive qui en provient, dépendent en quelque ſorte

de l'activité du feu qui accompagne l'inflammation, il est évident qu'il y a, dans le mélange des matieres, une proportion à observer telle qu'il en résulte le plus grand effet, & par conséquent la meilleure poudre.

Il n'y a que l'expérience qui puisse nous guider dans le choix des doses les plus convenables des matieres qui composent la poudre; & il paroît que la regle la plus généralement reçue, est qu'une certaine quantité de poudre soit composée de trois quarts de salpêtre, & que l'autre quart soit également partagé entre le soufre & le charbon. Cette proportion s'observe en France, & chez la plupart des nations de l'Europe. On s'en écarte un peu en Angleterre, dans l'intention de perfectionner la poudre; mais si elle a quelque supériorité sur les autres, toutes les méthodes employées jusqu'à présent pour éprouver la poudre, n'ont pu y faire découvrir de différence bien sensible.

Ce n'est point assez, pour avoir de la bonne poudre, que les matieres soient dosées convenablement; il n'est pas moins important qu'elles soient bien mélangées. Si l'on n'a point cette attention, il pourra se faire qu'il y ait trop de salpêtre dans une partie de la poudre, & pas assez dans l'autre, ce qui rend nécessairement la poudre plus foible.

Puisque la bonté de la poudre dépend d'un si grand nombre de circonstances, il est essentiel que les personnes chargées d'en recevoir dans les magasins publics, aient une méthode certaine pour s'assurer de sa qualité. Celle qu'on emploie communément dans ce pays, consiste à allumer une pincée de la poudre qu'on veut

éprouver, ſur une planche bien unie, & à obſerver attentivement la flamme, la fumée, & la trace que la poudre laiſſe ſur la planche ; ces obſervations ſuffiſent, à ce qu'on prétend, pour faire juger de la qualité de la poudre. Cette maniere d'éprouver la poudre, quoiqu'elle ſoit en vogue, eſt ſi incertaine, qu'elle ne ſera sûrement pas réputée pour bonne par aucune perſonne ſenſée. On emploie encore, ſelon les circonſtances, d'autres moyens pour éprouver la poudre, tous analogues aux éprouvettes ordinaires que l'on trouve chez les Epiciers ; il y en a qui ſont artiſtement travaillées, & qui, au lieu d'un reſſort, font mouvoir un poids, qui indique une force plus certaine & plus uniforme.

Ces machines, quoique plus parfaites que les éprouvettes communes, ne ſont pas ſans défaut ; elles ne ſont miſes en mouvement que par la premiere impulſion inſtantanée de la flamme, & s'échappant aux efforts ſuivans de ſa force expanſive, elles ne peuvent point indiquer la force de la poudre enflammée, avec la certitude & l'uniformité que l'on attend de ces ſortes d'épreuves : auſſi ſuis-je très-porté à donner la préférence à la méthode uſitée en France pour l'épreuve des poudres que l'on reçoit dans les magaſins. Voici en quoi elle conſiſte.

Dans chaque magaſin, il ſe trouve un petit mortier avec tout ſon attirail ; les dimenſions en ſont preſcrites par une Ordonnance, pour être les mêmes par tout le Royaume. Ce mortier eſt toujours pointé à 45 pouces, & ſa chambre contient exactement trois onces de poudre. Il faut qu'avec cette charge un globe de cuivre

ayant 7 $\frac{1}{2}$ pouces de diametre, ſoit chaſſé à 55 toiſes au moins (17), pour que la poudre ſoit reçue dans les magaſins.

On objecte contre cette méthode, que s'il falloit ſoumettre chaque barril de poudre à une pareille épreuve, l'embarras de charger à chaque fois & de rapporter le globe, occaſionneroit une perte de temps trop conſidérable. Veut-on au contraire juger de la qualité de pluſieurs barrils, par l'échantillon d'un ſeul d'entre eux? On riſque d'être trompé, en recevant pour bonne

(17) Le dernier réglement de 1775 preſcrit une portée de 90 toiſes pour l'admiſſion des poudres dans les magaſins du Roi. On pourroit même en exiger une plus grande, ſans nuire aux intérêts des Entrepreneurs, puiſque, depuis quelques années, la fabrication des poudres a été tellement perfectionnée, que les trois onces portent actuellement le globe de 60 livres au-delà de 120 toiſes.

Pour répondre aux objections que l'on oppoſe enſuite contre l'uſage du mortier d'épreuve, il ſuffit d'obſerver, quant à la premiere, que toute autre méthode ſeroit ſujette au même inconvénient, car ce n'eſt jamais que ſur un échantillon que l'épreuve peut ſe faire : or, d'un échantillon à la totalité, il n'y a pas plus à conclure que d'un barril à pluſieurs autres provenant de la même fabrication.

La ſeconde objection n'eſt pas mieux fondée : l'objet de l'épreuve n'eſt point de connoître la force abſolue de la poudre, mais ſeulement de s'aſſurer comparativement ſi elle a une force ſuffiſante. Si l'on ſait donc qu'une eſpece de poudre, dont trois onces dans le mortier d'épreuve chaſſent un globe de 60 livres à une certaine diſtance, eſt capable de produire tout l'effet qu'on en attend, il importe peu de ſavoir comment cette charge agit ſur le globe, pourvu que ce ſoit toujours de la même maniere; & c'eſt ce que prouve aſſez l'uniformité que l'on obſerve dans les portées, à chaque épreuve.

Digitized by Google

de la très-mauvaiſe poudre. Une autre objection plus forte encore, c'eſt qu'il y a une trop grande diſproportion entre le poids du globe & la charge de poudre qu'on emploie pour le chaſſer : de là vient que la poudre doit agir ſur le globe, & tendre à ſe dilater plus long-temps qu'il n'arrive dans l'uſage ordinaire qu'on en fait. Ce temps eſt aſſez conſidérable, pour que la chaleur de la flamme diminue ſenſiblement, & qu'une grande partie du fluide élaſtique s'échappe par la lumiere & le vent du globe ; de ſorte que le mouvement produit dans ce cas par la poudre enflammée, ne doit être qu'un peu plus de la moitié de ce qu'il ſeroit, ſi la poudre agiſſoit avec toute ſa force ſur le globe, & que les cauſes ſuſdites, qui tendent à l'affoiblir, n'euſſent point lieu. Or, comme il eſt impoſſible, par cette raiſon, que l'affoibliſſement de la poudre ſoit ſoumiſe à aucune loi conſtante, il peut arriver que, ſelon que l'une de ces cauſes prévaudra ſur les autres, le globe ſoit porté à des diſtances très-différentes, & qu'on n'en puiſſe rien conclure de certain touchant la force de la poudre.

Cette derniere objection n'aura point lieu, ſi l'on ſe ſert de la méthode que j'ai employée pour éprouver pluſieurs ſortes de poudre, par laquelle on détermine la vîteſſe communiquée au mobile par une charge de poudre ordinaire. Cette vîteſſe, quelque grande qu'elle ſoit, pouvant toujours être connue par le mouvement du pendule, en conſéquence des principes établis plus haut, il paroît que ce moyen eſt préférable à celui qui eſt uſité en France. Quoique les épreuves de la poudre au moyen du pendule

ſoient plus exactes, plus expéditives & moins pénibles que les autres, cependant cette méthode exigeant une grande préciſion, & pouvant être ſujette à quelques inconvéniens, quand l'épreuve doit s'étendre ſur un grand nombre de barrils de poudre, j'ai imaginé une autre méthode qui n'eſt pas moins exacte, & beaucoup plus expéditive, n'y ayant d'autre embarras que celui de peſer la poudre de chaque barril. Quatre hommes pourront, par ce moyen, faire l'épreuve de 500 barrils de poudre dans une matinée. D'ailleurs, comme il n'entre que du fer fondu dans la conſtruction de cette machine, on pourra, à cauſe de la modicité du prix, la multiplier autant qu'on voudra. Quoi qu'il en ſoit, je n'en donnerai point ici la deſcription, me réſervant d'en parler dans un autre temps. Paſſons maintenant à la recherche des effets de la réſiſtance de l'air, matiere très-importante pour la perfection & les progrès de l'Artillerie.

Remarque.

La force de la poudre, ainſi qu'on l'a ſuffiſamment prouvé, dépend de deux cauſes, premiérement de la quantité de matiere ſubtile qui ſe développe par l'inflammation, & que nous avons fait voir être un fluide analogue à l'air; ſecondement, de la promptitude de l'inflammation. Ainſi, plus il y a de ce fluide renfermé dans la ſubſtance de la poudre, plus ſa denſité ſera grande, & par conſéquent ſa force expanſive, qui conſtitue la force de la poudre, ſera d'autant plus conſidérable. On peut déduire de là tout ce que nous avons dit des parties groſ-

ſieres de la poudre, qui doivent conſumer une partie de ſa force, par le mouvement qui leur eſt communiqué : car il eſt évident que plus il ſe développe de matiere ſubtile d'une certaine quantité de poudre, moins il doit y reſter de parties groſſieres. Il y a donc un double avantage à retirer d'une poudre qui contient une plus grande quantité d'air comprimé : outre qu'il en réſulte une plus forte élaſticité, il y a moins de matieres groſſieres à mettre en mouvement. D'un autre côté, la promptitude de l'inflammation contribue auſſi beaucoup à rendre la poudre plus violente, c'eſt par le feu que le fluide élaſtique eſt dégagé des liens qui le retiennent, & qu'il eſt mis en état d'exercer ſa force ; cette force eſt donc d'autant plus grande, qu'il ſe dégage plus de fluide au premier inſtant de l'inflammation, ou que cette inflammation ſe communique plus rapidement à toutes les parties de la poudre (18). La vivacité de l'inflammation produit encore un autre effet; c'eſt d'exciter une cha-

(18) La rapidité de l'inflammation dépend beaucoup auſſi de la forme des grains. M. le Comte de Roſtaing fit à Auxonne, en 1777, des épreuves comparatives de la meilleure poudre de Suiſſe, & de celle que l'on fabrique en France : celle-ci porta le globe à 101 toiſes, & l'autre à 122. On réduiſit enſuite ces deux eſpeces de poudre en pulverin; ce qui ne changea rien à la portée de la poudre de France, mais l'autre ne porta plus qu'à 95 toiſes; preuve évidente que la poudre grenée de Suiſſe n'avoit d'avantage ſur la nôtre que par la forme de ſes grains, qui eſt ſenſiblement ſphérique, au lieu que les grains de la nôtre ſont d'une forme très-irréguliere. On ne peut douter que la ſphéricité des grains & l'égalité de leur groſſeur, ne fuſſent la principale cauſe de la ſupériorité qu'avoit alors la poudre de Berne, car elle eſt ſûrement

leur

Digitized by Google

leur plus vive, d'augmenter par cette raison l'élasticité du fluide, & par conséquent la force de la poudre. Afin donc de connoître parfaitement la force de chaque espece de poudre, il faut savoir d'abord combien une quantité donnée de poudre renferme de fluide comprimé, & ensuite la durée de son entiere inflammation. On parvient à la premiere de ces connoissances, par le moyen des expériences que l'Auteur rapporte dans les premieres Propositions de ce Chapitre; mais la seconde n'est point susceptible du même degré de certitude, le temps employé à l'entiere inflammation de la poudre étant de si courte durée, qu'il échappe à l'observation; ce temps dépend d'ailleurs d'un si grand nombre de circonstances qui le font varier, qu'il est impossible de rien établir de certain à ce sujet. En conséquence nous nous bornerons à l'examen du premier point en rassemblant les divers résultats des expériences de

inférieure à la nôtre par la qualité des matières: 1°. elle est moins compacte, & se pulvérise plus facilement; 2°. elle est plus légere, sa pesanteur spécifique étant à celle de la poudre de France dans le rapport de 100 à 113; 3°. elle attire plus facilement l'humidité de l'air, s'en étant chargée de 7 grains, pendant que la même quantité de notre poudre, étendue sur la même surface, n'en a pris que 4 grains; ce qui ne provient que d'un salpêtre moins bien raffiné, & qui conserve encore une partie de son eau de crystallisation. Si donc, avec le choix des matieres & le soin que l'on donne aujourd'hui à la manipulation dans nos Fabriques, on donnoit aussi une forme sphérique aux grains de notre poudre de guerre, il en résulteroit une inflammation plus rapide, plus complette, & sa force seroit considérablement augmentée.

l'Auteur. Il a déterminé de deux manieres la quantité d'air, ou de fluide élastique contenu dans la poudre de guerre, qu'il a eu principalement en vue; premiérement par rapport à l'espace que ce fluide occupe, & ensuite par rapport à son poids. Il a trouvé par la premiere méthode que l'air renfermé dans un pouce cubique de poudre, remplissoit un espace de 244 pouces cubiques, après avoir acquis, par son expansion, la même densité que l'air naturel. Ainsi puisqu'un pouce cubique de poudre renferme 244 pouces cubiques d'air naturel dans un état de forte compression; il est évident que si dans un canon d'un diametre quelconque, la longueur AC (fig. 9) de l'espace occupé par la poudre est $= b$, l'air contenu dans cette poudre sera égal à un cylindre d'air naturel, de même diametre que le canon, & d'une hauteur $= 244b$. En comparant le poids de cette quantité d'air avec le poids total de la poudre, l'Auteur a trouvé que l'un étoit à l'autre comme 3 à 10; & comme le poids de l'air contenu dans la charge AC, est égal au poids d'une colonne d'air naturel, dont la hauteur $= 244b$, il s'ensuit que le poids total de cette charge de poudre est égal au poids d'une colonne d'air naturel d'une hauteur $= \frac{10}{3} \times 244b = 813b$. Donc les parties grossieres qui entrent dans la composition de la poudre, sont égales, quant au poids, à une colonne d'air naturel, dont la hauteur $=$ $569b$. Or ces parties grossieres ne se dilatent point par l'inflammation; si nous supposons donc que l'air contenu dans la substance des grains de poudre, y soit 800 fois plus dense que l'air

naturel, ou qu'il occupe dans l'eſpace AC une partie dont la longueur $= \frac{244}{800}b$, le reſte $\frac{556}{800}b$ ſera occupé par la matiere groſſiere de la poudre, & par l'air qui ſe trouve dans les interſtices que les grains laiſſent entre eux. Enſorte que ſi la ſomme de ces interſtices fait la cinquieme partie de l'eſpace AC, il reſtera $\frac{396}{800}b$ pour le volume de la matiere groſſiere avant & après l'inflammation. Qu'il s'agiſſe maintenant de comparer d'autres eſpeces de poudre avec celle que l'Auteur a miſe en expérience, nous ſuppoſerons que la quantité d'air contenu dans la poudre qu'on veut connoître, eſt égale à une colonne d'air naturel d'une hauteur $= mb$, b exprimant toujours la longueur de l'eſpace AC, & que le poids total de la poudre eſt égal à celui d'une colonne d'air d'une hauteur $= nb$; ſi nous admettons en outre que l'air enfermé dans les grains de poudre eſt conſtamment 800 fois plus denſe que l'air naturel, il occupera avant l'inflammation un eſpace dont la longueur $= \frac{m}{800}b$, donc en prenant encore la cinquieme partie de l'eſpace AC pour la valeur des interſtices entre les grains de poudre, il reſtera $\frac{640-m}{800}b$, pour la longueur de l'eſpace que rempliroit la matiere groſſiere de la poudre. Cela poſé, les valeurs de m & n pourront toujours ſe déduire par le calcul de la vîteſſe connue de la balle. Soit à cet effet la longueur entiere du canon $AB = a$; k la hauteur d'une colonne d'air égale au poids de la balle; h la hauteur d'une colonne d'air dont le poids exprime l'élaſticité de l'air naturel; ſoit auſſi $AM = x$; & $\sqrt{v}$ la vîteſſe du mobile arrivé

en MM, de maniere que tandis qu'il parcourt $Mm = dx$, la hauteur v augmente de dv. Pour produire ce furcroît de vîteffe dans le mobile, il faut une force égale au poids d'une colonne d'air dont la hauteur $= \frac{kdv}{dx}$. D'ailleurs les matieres, tant fubtiles que groffieres de la poudre, étant enfemble égales, quant au poids, à une colonne d'air d'une hauteur $= nb$, la force accélératrice, pour ces matieres, fera $= \frac{nbdv}{2dx}$; & cette formule a lieu, foit que la matiere groffiere de la poudre foit uniformément répandue dans l'efpace AM, foit, comme nous l'avons fuppofé ailleurs, qu'une moitié foit chaffée avec la balle, & que l'autre refte en arriere au fond du canon. S'il ne s'échappe rien de la poudre par la lumiere & le vent de la balle, la force néceffaire pour l'accélération, tant de la balle, que de la poudre, fera $= (k + \frac{1}{2} nb) \frac{dv}{dx}$, ce qui convient à l'hypothefe de l'inflammation inftantanée, auffi bien qu'à celle de l'inflammation fucceffive.

Suppofons que toute la poudre prenne feu au premier inftant, elle fournira un cylindre d'air dont la hauteur $= mb$, & qui, conjointement avec la matiere groffiere, occupera l'efpace AM; mais cette matiere en occupe une partie $= \frac{640 - m}{800} b$, il refte donc $x - \frac{(640 - m) b}{800}$ pour le volume de l'air; d'où l'on voit que cet air eft autant de fois plus denfe que l'air naturel, que la quantité $x - \frac{(640 - m) b}{800}$ eft moindre

que mb. Faisons, pour abréger, $\frac{800\,mb}{800\,x - (640 - m)\,b} = s$, l'air comprimé dans l'espace AM sera donc s fois plus dense que l'air naturel, & son élasticité sera exprimée par le poids d'une colonne d'air naturel dont la hauteur $= h\,(s + \frac{ss}{6q}) = h\,(s + \frac{ss}{4800})$, en supposant que la lettre q, qui exprime le plus haut degré de densité où l'air puisse atteindre, soit $= 800$. Mais à cause de la chaleur, cette hauteur doit encore être multipliée par $\beta = 4$; on aura donc, en considérant la pression & la résistance de l'air extérieur, $(k + \frac{1}{2}\,nb)\,\frac{dv}{dx} = \beta h\,(s + \frac{ss}{4800}) - h - \frac{1}{2}\,v$, dont l'intégrale, en négligeant les plus petits termes, est $(k + \frac{1}{2}\,nb)\,v = \beta mbh\; l\,\frac{800\,x - 640\,b + mb}{160\,b + mb}$ & $v = \frac{\beta mbh}{k + \frac{1}{2}\,nb}\; l\,\frac{800\,x - 640\,b + mb}{160\,b + mb}$.

On voit par là que le mobile reçoit d'autant plus de vîtesse, ou que la poudre est d'autant meilleure, que la valeur de m est plus grande, & celle de n plus petite ; c'est-à-dire, qu'il y a plus d'air dans la poudre, & qu'elle est elle-même plus légere. Mais cette derniere considération est d'une très-petite importance & peut être négligée, parce que toutes les especes de poudre ont à peu près la même pesanteur ; fussent-elles même plus légeres, elles n'en seroient pas pour cela sensiblement plus fortes. Tout dépend donc de la valeur de m, qui exprime la quantité d'air ou de fluide élastique contenu dans la poudre ; & si toute espece de poudre s'enflammoit subitement en un instant, on ne pourroit juger avec

certitude de sa qualité, que par la valeur de m. Or, il résulte des expériences de l'Auteur, que pour la poudre de guerre qu'il a employée, on a $m = 244$; une autre sorte de poudre sera donc réputée meilleure que celle-ci, ou plus foible, selon qu'elle donnera $m > 244$, ou $m < 244$. Il suit de là que les expériences faites par l'Auteur, pour trouver la valeur de m, seroient la meilleure maniere d'éprouver la poudre, si la considération qu'elles exigent d'un grand nombre de circonstances, ne rendoit cette méthode trop longue & trop embarrassante. Mais si l'inflammation de la poudre étoit instantanée, comme nous venons de le supposer avec notre Auteur, rien ne feroit plus facile que d'en faire l'épreuve: il suffiroit de connoître le premier effort de la poudre à l'instant de l'explosion, & de se servir à cet effet des éprouvettes ordinaires, qui font connoître la bonté de la poudre, par la hauteur à laquelle elle est capable de chasser un poids connu. L'Auteur n'objecte lui-même autre chose contre cette méthode, sinon qu'elle n'indique que le premier effort de la poudre. Mais si, comme il le soutient, la poudre s'allume toute au même instant, la force qu'elle exerce successivement sur le mobile, dépend absolument de ce premier effort; les pressions successives résultantes de l'expansion du fluide, n'ayant d'activité qu'en raison de son degré de compression, ou de sa force élastique au premier instant de l'explosion. Si donc l'Auteur trouve cette maniere d'éprouver la poudre, imparfaite & inexacte, il est en contradiction avec lui-même, car c'est vouloir détruire le systême de l'inflammation

instantanée, qu'il a si fort à cœur. Quoique, sur ce point, nous soyons d'un avis contraire au sien, nous ne pouvons cependant rejeter cette maniere d'éprouver la poudre, & en méconnoître l'utilité, si l'on donne plus de soin à la construction des éprouvettes, & qu'on y fasse quelques changemens qui les rendront beaucoup plus parfaites : car quand même la poudre ne s'enflammeroit pas toute à la fois au même instant, son effet total dépendra toujours de la premiere impulsion; & si la durée de l'inflammation est la même dans des quantités égales de poudre, on pourra juger avec certitude de la force totale par le premier effort. Mais si l'on n'admet point cette égalité dans la durée de l'inflammation, il faudra que l'éprouvette soit construite de façon que la poudre puisse agir quelque temps sur la piece mobile, avant de la chasser. Il ne paroît pas difficile de rendre ces machines susceptibles de ce degré de perfection, & peut-être la nouvelle invention dont notre Auteur fait un mystere, n'est-elle fondée que sur quelques changemens à faire aux éprouvettes ordinaires : un Artiste adroit, guidé par l'expérience, pourroit facilement les exécuter. Il ne feroit question que de donner un peu plus de profondeur au petit canon où l'on met la poudre, afin qu'elle n'occupât qu'une partie de sa capacité; il faudroit en outre que le poids à chasser fût terminé en forme de bouchon, de façon que s'adaptant exactement au petit canon, sa partie inférieure posât immédiatement sur la poudre, au moyen de quoi la poudre agira sur ce poids, non-seulement au premier instant de

S 4

l'inflammation, mais encore jufqu'à ce qu'il foit chaffé hors du canon. Et comme ce poids eft très-grand, eu égard à la quantité de poudre dont on fait l'épreuve, qu'elle ne peut par conféquent lui imprimer un mouvement bien rapide, il eft évident qu'avant que le poids foit entiérement forti du petit canon, toute la poudre aura pris feu, ou du moins autant à proportion qu'il s'en enflamme ordinairement dans une arme à feu.



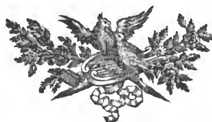
Digitized by Google

CHAPITRE II.

De la résistance de l'air, & du chemin parcouru dans l'air par une Bombe ou un Boulet.

AVANT d'entrer en matiere, il est bon d'observer que la plupart des Auteurs qui ont traité ce sujet, ont admis comme une regle certaine, qu'un corps qui se meut dans le même fluide, y rencontre une résistance constamment proportionnelle au quarré de sa vîtesse; c'est-à-dire qu'à une vîtesse triple le fluide oppose une résistance neuf fois plus grande qu'à la vîtesse simple; à une vîtesse quadruple, une résistance seize fois plus grande, & ainsi des autres. Quoique cette regle, prise dans un sens trop général, s'écarte beaucoup de la vérité, comme nous le ferons voir ci-après; elle est cependant très-juste dans certains cas particuliers, & nous nous en servirons avec confiance dans nos recherches, toutes les fois que la différence entre les vîtesses du mobile exposé à la résistance du fluide sera très-petite. Ainsi quand nous dirons dans la suite, que la résistance du fluide devient, selon les variations de la vîtesse, plus ou moins grande; il ne faudra entendre cette augmentation & cette diminution, que par rapport à la résistance que le mobile éprouveroit en vertu de la regle dont

nous venons de parler, ou relativement au fluide lui-même s'il devenoit plus ou moins denſe. Notre principal objet, dans ce Chapitre, eſt de prouver d'une maniere inconteſtable, que les différentes denſités du fluide, & les différentes vîteſſes du corps qui s'y meut, ſont capables de produire, dans la réſiſtance du fluide, des changemens beaucoup plus conſidérables, qu'il n en pourroit réſulter des principes ordinaires, quand même on ſuppoſeroit la denſité du fluide trois fois plus grande. Nous nous propoſons de démontrer cette vérité de maniere à ne laiſſer aucun doute.



Digitized by Google

PROPOSITION I.

De la résistance que les corps éprouvent lorsqu'ils se meuvent dans un fluide.

POUR se faire une idée juste de la résistance que les solides éprouvent de la part d'un fluide dans lequel ils se meuvent, il est nécessaire de distinguer deux sortes de fluides : la premiere comprend tous les fluides qui sont tellement comprimés, que la place que vient d'abandonner un corps qui s'y meut, est aussi-tôt rempli sans rester vuide un instant. Les fluides de la seconde espece sont ceux qui ne sont point du tout comprimés, ou ne le sont pas assez, pour que l'espace abandonné par le corps en mouvement, ne reste point vuide pendant quelques instans. Ces différentes propriétés des fluides occasionnent des changemens très - remarquables dans la maniere de déterminer la résistance qu'ils opposent au mouvement des corps solides ; & il est très-essentiel d'y avoir égard, si l'on veut avoir une connoissance exacte des effets de l'air sur les bombes & les boulets qui s'y meuvent. Car, selon qu'un mobile a plus ou moins de vîtesse, on peut attribuer à l'air qu'il traverse les deux propriétés dont nous venons de parler.

Si un fluide étoit constitué de façon que ses molécules fussent éloignées l'une de l'autre, sans pouvoir exercer d'action entr'elles, il seroit facile, en considérant la quantité de mouvement qui leur est communiquée, de déterminer la

réſiſtance qu'un mobile éprouveroit en traverſant un pareil fluide. Si, par exemple, un cylindre ſe mouvoit dans ce fluide ſuivant la direction de ſon axe, il poufferoit ſuivant la même direction toutes les molécules qu'il rencontreroit, & leur communiqueroit à toutes la même quantité de mouvement; en ſuppoſant toutefois que le cylindre & ces molécules ne fuſſent point élaſtiques. Connoiſſant donc la vîteſſe du cylindre, ſon diametre & la denſité du fluide, on pourroit déterminer la quantité de mouvement communiqué aux molécules de ce fluide, laquelle, à cauſe de la réaction égale à l'action, ſeroit égale à ce que le corps perd de ſon mouvement; on connoîtroit donc la grandeur de la réſiſtance qu'un cylindre éprouveroit en traverſant ce fluide.

Les molécules d'un fluide, tel qu'on vient de le ſuppoſer, n'étant donc point liées entre elles, mais ſéparées les unes des autres, chacune d'elles pourra, au moins pendant quelque temps, conſerver ſon mouvement, ſans altérer celui des particules circonvoiſines. Ainſi, ſi, au lieu d'un cylindre qu'on a ſuppoſé ſe mouvoir dans le fluide ſuivant la direction de ſon axe, on ſuppoſe un autre corps qui choque obliquement les molécules de ce fluide, le mouvement de ces molécules aura alors une direction différente de celle du corps; elle ſera perpendiculaire à ſa ſurface choquante; & dans ce cas il faudra eſtimer la réſiſtance du fluide, non pas par le mouvement total communiqué aux molécules, mais par la partie de ce mouvement qui aura la même direction que le corps. Dans ces ſortes de fluides, dont les molécules ſont ſéparées les unes

des autres, la grandeur de la réſiſtance dépend principalement de la figure & de la courbure de la ſurface antérieure du mobile; d'où l'on voit que, ſelon les différentes formes de cette ſurface, la réſiſtance du fluide eſt ſujette à bien des modifications, quand même la ſection du mobile, faite perpendiculairement à ſa direction, ſeroit toujours la même. Newton a démontré, par exemple (19), que la réſiſtance qu'une ſphere éprouve dans un fluide, n'eſt que la moitié de celle qu'y éprouveroit un cylindre de même diametre, qui ſe mouvroit ſuivant la direction de ſon axe avec la même vîteſſe que la ſphere.

Quoique la conſidération d'un pareil fluide puiſſe être d'une grande utilité pour connoître la nature de la réſiſtance, cependant nous n'en connoiſſons point qui ait les propriétés dont nous venons de parler. Tous les fluides connus ſont tellement conſtitués, que leurs molécules ſe touchent actuellement, ou agiſſent les unes ſur les autres comme ſi elles ſe touchoient; de maniere qu'une molécule choquée par un corps, ne peut point ſe mouvoir, ſans qu'elle en mette auſſitôt un grand nombre d'autres en mouvement, même d'aſſez éloignées. D'ailleurs le mouvement ainſi communiqué à une partie du fluide, ne peut avoir de direction déterminée, elle doit être différente pour chaque molécule, ſuivant la poſition qu'elles ont relativement à celles qui les ont choquées. Donc puiſque les parties d'un fluide ſont preſque toutes mues ſuivant différentes directions; il s'enſuit que la grandeur de la réſiſtance, que l'on ne peut déterminer par le

(19) Phil. nat. prin. Math. L. 2. Prop. 34.

mouvement des molécules, qu'autant qu'elles ont une même direction, ou que l'on peut réduire une partie de leur mouvement à avoir la même direction que le corps; il s'enfuit, dis-je, que la grandeur de la résistance est bien différente de celle du cas précédent, & beaucoup plus difficile à déterminer.

Si un fluide est comprimé par le poids de ses parties supérieures, comme cela a lieu dans tous les fluides connus, excepté à leur surface supérieure, & que la vîtesse d'un corps qui s'y meut soit moindre, que celle avec laquelle les molécules de ce fluide se précipiteroient, en vertu de leur compression, dans un espace vuide; il est évident que le lieu abandonné par le corps sera aussi-tôt rempli par le fluide, & & que les molécules que le corps aura déplacées, au lieu d'aller en avant, se détourneront petit à petit de la direction du corps, pour reuer vers sa partie postérieure, & rétablir ainsi l'équilibre, qui, sans cela, seroit rompu par l'affluence continuelle de la matiere fluide dans les lieux abandonnés par le corps. Il faut donc que dans ce cas le mouvement progressif du fluide, & par conséquent la résistance que les corps y éprouvent, & qui dépend essentiellement de ce mouvement, soient beaucoup moindres que dans le cas précédent, où l'on avoit supposé que les molécules ont le même mouvement & la même direction que le corps. Newton a démontré qu'un cylindre qui se meut suivant sa longueur dans un fluide comprimé, tel que nous l'avons considéré en dernier lieu, y éprouvoit une résistance quatre fois moindre qu'il n'éprouveroit avec la même vîtesse dans

un milieu de la nature de ceux dont nous avons parlé plus haut; la denſité des deux eſpeces de fluides étant la même.

La différence de ces deux ſortes de fluides ne conſiſte pas ſeulement dans la grandeur de la réſiſtance qu'ils oppoſent au mouvement d'un corps; mais encore dans l'effet qu'ils produiſent, ſelon la diverſité des figures du corps qui s'y meut.

Nous avons fait voir que dans un fluide, dont les molécules ſont ſéparées l'une de l'autre, comme nous l'avons ſuppoſé en premier lieu, la courbure ou l'obliquité de la ſurface antérieure du corps en mouvement contribuoit ſenſiblement à diminuer la réſiſtance. Mais cette regle n'a point lieu dans les fluides comprimés; du moins l'effet de la figure du corps n'y eſt pas auſſi ſenſible. Car dans les fluides de cette derniere eſpece, la grandeur de la réſiſtance dépend principalement du plus ou moins de facilité qu'ont les molécules pouſſées par le corps, à ſe porter en arriere. Et comme cette circonſtance eſt preſqu'indépendante de la figure du corps en mouvement, qu'elle ſeroit à peu près la même, ſoit que le corps fût cylindrique, conique ou ſphérique; il s'enſuit que, pourvu que la coupe tranſverſale du corps, & par conſéquent la quantité de molécules miſes en mouvement, ne change point, la figure du corps n'influera point ſenſiblement ſur la grandeur de la réſiſtance. Newton s'eſt attaché avec un ſoin particulier à examiner la réſiſtance qu'un corps en mouvement rencontre dans un fluide comprimé, lorſque la viteſſe de ce corps eſt moindre que celle que les molécules du fluide peuvent recevoir en vertu

de sa compression, & il a déterminé, dans ce cas, la grandeur de la résistance du fluide, relativement à sa densité, & aux différentes grosseurs du corps qui s'y meut. Néanmoins il avertit très-expressément que la regle dont il s'est servi n'est point générale, & ne peut être vraie sans quelques restrictions, en ce que la compression des parties élémentaires du fluide doit être supposée d'autant plus grande, que la vitesse du corps en mouvement est plus grande. C'est pour n'avoir pas fait à cette remarque toute l'attention qu'elle mérite, que quelques Ecrivains qui ont suivi Newton, ont appliqué sa théorie à tous les degrés de vitesse sans exception, & sans avoir aucun égard au degré de compression des fluides, dont la résistance s'opposoit au mouvement des corps. Aussi ontils déterminé la résistance de l'air contre le mouvement des balles & des boulets, de façon que, selon eux, elle ne seroit que le tiers de ce que nous l'avons trouvée par l'expérience.

Il suit évidemment de tout ce qu'on vient de dire, que la force de la résistance d'un fluide doit augmenter, lorsque la vitesse du corps qui s'y meut est assez grande, pour que les molécules du fluide ne puissent se précipiter dans l'espace vuide qu'il laisse derriere lui, immédiatement après qu'il l'a abandonné. Car dans ce cas le mobile est privé de la pression que produiroient les molécules affluentes dans ce vuide, & qui contrebalanceroient en quelque façon la résistance du fluide qui le précede; il a de plus à soutenir sur sa partie antérieure, tout le poids d'une pression réagissante, outre le mouvement qui est communiqué aux particules du fluide, lesquelles

lesquelles pouſſées en avant par le mobile, ne peuvent, faute d'une compreſſion ſuffiſante dans le fluide, ſe détourner aſſez vîte de cette direction pour ſe porter en arriere. Cette ſorte de réſiſtance peut donc ſe rapporter à celle des fluides de la premiere eſpece, dont les parties, ſans liaiſon entr'elles, peuvent ſe mouvoir indépendamment les unes des autres. Et comme nous avons déjà fait obſerver que la réſiſtance d'un pareil fluide non comprimé, ſur un cylindre qui s'y ment ſuivant ſa longueur, eſt quatre fois auſſi grande que la réſiſtance d'un fluide comprimé & de même denſité ; on peut conclure que lorſqu'il reſte un vuide derriere le mobile, la réſiſtance du fluide eſt à peu près quadruple de ce qu'elle ſeroit s'il n'y avoit point de vuide. Car quand les lieux que le mobile vient de quitter ne ſont pas auſſi-tôt remplis, nous avons fait voir que le fluide étoit de la nature de ceux dont les parties ſont ſéparées les unes des autres.

C'eſt dans ce cas que paroît ſe trouver un cylindre qui ſe meut avec différens degrés de vîteſſe dans un fluide comprimé ; de maniere que s'il ſe meut d'abord avec une très-grande vîteſſe, & qu'il continue à le traverſer juſqu'à ce que ſa vîteſſe ſoit preſqu'éteinte, la réſiſtance du milieu, au commencement du mouvement, ſera à peu près quadruple de ce qu'elle eſt à la fin. Il n'en eſt pas de même d'une ſphere, la différence des réſiſtances qu'elle éprouve au commencement & à la fin de ſon mouvement, n'eſt point auſſi conſidérable ; la réſiſtance qu'elle éprouve dans un milieu comprimé n'eſt, à cauſe de la courbure de ſa ſurface, que double de celle que lui

oppose un milieu non comprimé; car l'obliquité de la surface ne diminue la résistance que dans un cas, & non dans l'autre. Cependant, comme la force résultante de la compression du fluide, quand même il resteroit un vuide derriere la sphere, pourroit changer la direction des molécules poussées en avant, les porter en arriere, & augmenter leur densité si le fluide est élastique; il est très-vraisemblable que la résistance d'une sphere, qui se meut avec une très-grande vîtesse dans un fluide comprimé, tient à peu-près le milieu entre celle d'une sphere & celle d'un cylindre dans un fluide non comprimé. Lors donc que la vîtesse sera assez grande, nous pourrons admettre pour la sphere, une résistance plus que double & moins que quadruple de celle qu'elle éprouveroit de la part du même fluide, dans le cas d'une vîtesse beaucoup moindre. Nous ne croyons donc pas nous tromper en admettant qu'une sphere, lorsque sa vîtesse est très-grande, rencontre dans un fluide environ trois fois plus de résistance, relativement à sa vîtesse, que lorsqu'elle se meut lentement.

Puisque la résistance augmente si considérablement lorsque la vîtesse du mobile est assez grande pour qu'il laisse derriere lui un vuide parfait, il faut que pour des vîtesses moindres, certains degrés de cette augmentation soient déjà très-sensibles : car quand même le vuide derriere le mobile seroit, en vertu de la compression du fluide, aussi-tôt rempli que formé, si la vîtesse, avec laquelle les particules du fluide remplissent ce vuide, n'est pas beaucoup plus grande que celle du mobile, ce que nous avons dit pour le cas d'un vuide parfait derriere le mobile, au-

roit encore lieu jufqu'à un certain point : & nous ne devons pas croire que l'augmentation de réfiftance, dont il a été queftion jufqu'à préfent, ceffera tout-à-coup, dès que le fluide n'aura que le degré de compreffion qu'il faut pour remplir l'efpace abandonné par le mobile ; mais nous devons concevoir que, dans ce cas, cette augmentation de réfiftance devient feulement moins confidérable, felon que la viteffe, avec laquelle le fluide pourfuit le corps, furpaffe plus ou moins celle de ce corps.

De là nous concluons que fi un globe fe meut dans un fluide avec plus de viteffe, que n'en ont les molécules de ce fluide, en vertu de fa compreffion, pour fe précipiter dans le vuide, de maniere qu'il refte toujours un efpace vuide derriere le globe pendant fon mouvement ; nous concluons, dis-je, que, dans ce cas, la réfiftance que ce globe rencontre dans le fluide, eft près de trois fois plus grande, relativement à fa viteffe, qu'il ne réfulte de la théorie de Newton dans le cas d'un mouvement lent. Nous pouvons auffi conclure que la réfiftance diminue à mefure que le mouvement du globe fe ralentit, & que fa viteffe devenant enfin moindre que celle des parties du fluide réfultante de fa compreffion, la réfiftance fera parfaitement conforme à la théorie de Newton, touchant les fluides comprimés.

On voit donc combien l'on s'eft trompé en admettant pour toutes fortes de fluide, & pour tous les degrés de viteffe des corps qui s'y meuvent, des réfiftances proportionnelles aux quarrés de ces viteffes. Car il fuit évidemment de tout ce qu'on vient de dire, que cette régle

T 2

n'approche de la vérité, que lorſque les changemens dans la vîteſſe du mobile ſont peu conſidérables, & qu'on ne peut l'employer, ſans commettre une erreur groſſiere, lorſqu'on veut déterminer la réſiſtance pour des degrés de vîteſſe qui different beaucoup entr'eux.

Ces principes étant bien établis, nous allons nous occuper de la réſiſtance de l'air en particulier, nous conſulterons l'expérience pour la déterminer; & l'on ſe convaincra par-là de la juſteſſe de ce que nous avons dit ſur les effets de la réſiſtance des fluides; on verra en même temps combien ſe ſont trompés ceux qui ont cru qu'on pouvoit faire abſtraction de la réſiſtance que l'air oppoſe aux divers projectiles d'artillerie qui s'y meuvent.

Premiere Remarque.

Puiſqu'un corps ne peut ſe mouvoir dans un fluide ſans déplacer & mettre en mouvement les particules du fluide qui ſe trouve ſur ſon chemin, il doit néceſſairement perdre de ſa vîteſſe. Car tout mouvement doit être produit par une force; il en faut donc une pour pouſſer en avant les particules du fluide; & cette force, réagiſſant ſur le corps, doit ralentir ſon mouvement. C'eſt auſſi une ſuite des principes connus de méchanique, qu'un corps ne peut communiquer de mouvement à un autre ſans en perdre autant du ſien; toutes les regles du choc des corps ſe déduiſent de ce principe. Mais quelle eſt la cauſe de ces changemens? Il n'y en a point d'autre que la propriété qu'ont tous les corps de perſiſter dans leur état; propriété qui

ne leur eſt pas moins eſſentielle que l'étendue, on l'obſerve dans les corps en repos comme dans ceux qui ſont en mouvement. Car en vertu de cette propriété il faut qu'un corps en repos, y reſte continuellement ſans pouvoir acquérir le moindre degré de mouvement, ſi une force extérieure ne vient à lui en communiquer. Par la même raiſon lorſqu'un corps eſt en mouvement, il y perſiſtera invariablement ſi ſon mouvement n'eſt point altéré par quelque force extérieure. Donc toutes les fois qu'un corps qui étoit en repos ſera mis en mouvement, ou que le mouvement d'un corps aura été altéré, on pourra conclure avec ſûreté qu'une force extérieure a agi ſur ce corps. Or il y a deux choſes à conſidérer dans le mouvement d'un corps : ſa viteſſe & ſa direction ; de ces deux choſes dépend le mouvement du corps mu, qui par conſéquent a la propriété de les conſerver l'une & l'autre telles qu'il les a reçues. Donc ſi un corps eſt une fois en mouvement, & qu'aucune force extérieure n'agit ſur lui, il continuera de ſe mouvoir avec la même vîteſſe & ſuivant la même direction ; ſi au contraire il arrive quelque changement, ſoit dans la vîteſſe, ſoit dans la direction, ce ſera une preuve certaine de l'action d'une force extérieure ſur ce corps ; & puiſqu'il ſe fait à chaque inſtant de pareils changemens dans l'univers, que l'on n'y trouve ni repos parfait, ni mouvement uniforme, il eſt naturel de demander quelles peuvent être les forces qui produiſent toutes ces variations ? Pluſieurs Philoſophes, pour répondre à cette queſtion, ont imaginé que les corps, outre la propriété de ſe maintenir invariablement dans l'état où ils

ſont, ont encore celle de changer continuellement d'état. Mais outre que par cette opinion on attribue à la matiere deux propriétés directement oppoſées, elle ne fournit aucun moyen d'expliquer le moindre des changemens que nous appercevons dans l'univers. D'ailleurs la nature n'a pas beſoin pour cet effet d'une force particuliere : comme dans toutes ſes opérations elle choiſit conſtamment la voie la plus courte & la plus ſimple, elle n'emploie d'autre force pour produire tous les changemens, que cette propriété qu'ont tous les corps de ſe maintenir dans leur état. Il ſemble d'abord que ceci ſoit un paradoxe, & qu'il ſoit difficile de concevoir comment une force deſtinée à conſerver les corps dans leur état, puiſſe ſervir en même temps à le changer. Mais pour peu qu'on y réfléchiſſe, on comprendra bientôt que cette propriété des corps, par laquelle ils doivent perſiſter dans leur état, eſt non-ſeulement capable d'opérer des changemens, mais qu'elle produit en effet tous ceux dont on peut rendre raiſon. Pour mettre ceci dans tout ſon jour, repréſentons-nous deux corps A & B, dont le ſecond rencontre le premier en repos & le choque avec un certain degré de vîteſſe. Ces deux corps ont la propriété de ſe maintenir dans l'état où ils ſe trouvent ; l'un dans ſon état de repos, l'autre dans ſon état de mouvement avec la même vîteſſe & ſuivant la même direction. Il eſt donc clair que, lorſque le corps B aura atteint le corps A, aucun ne pourra perſiſter dans ſon état, ſans qu'il arrive de changement à celui de l'autre : car ſi l'on veut que A reſte en repos, il faut néceſſairement, puiſqu'il eſt impénétrable, ou que le mouvement

de B ſoit totalement détruit, ou qu'il rebrouſſe chemin, ou qu'il change de direction; d'où s'enſuit de façon ou d'autre un changement notable dans ſon premier état. Veut-on au contraire que le corps B conſerve toujours ſa viteſſe & ſa direction, il faudra qu'il chaſſe le corps A devant lui, & qu'il produiſe par conſéquent du changement dans ſon état. Donc, puiſqu'il eſt impoſſible que l'un & l'autre de ces deux corps perſiſtent dans leur état, & qu'il n'y a point de raiſon pour que l'un s'y maintienne plutôt que l'autre; il s'enſuit qu'ils doivent ſouffrir tous les deux, & en même temps, du changement dans leur état; c'eſt-à-dire que le corps A ſera mis en mouvement, & que le corps B perdra de ſa viteſſe. Or on nomme *force*, toute cauſe dont l'effet eſt de changer l'état d'un corps, la force qui a changé celui des deux corps A & B, dans le cas préſent, n'eſt donc autre choſe que la propriété qu'ont tous les corps de ſe maintenir dans leur état actuel. C'eſt donc à la propriété qu'a le corps A de ſe maintenir dans ſon état, qu'il faut attribuer le changement opéré dans celui du corps B; & la même propriété dans le corps B, eſt la cauſe & par conſéquent la force qui change l'état du corps A. Ainſi tant qu'un corps perſévere dans ſon état, c'eſt-à-dire, tant qu'il reſte en repos, ou que ſon mouvement ne ſouffre point d'altération, on ne voit autre choſe que la propriété qu'il a de perſiſter dans ſa maniere d'être. Mais dès que ce corps rencontre un obſtacle qui s'oppoſe à la conſervation de ſon état, il réſiſte par cette même propriété au changement qui doit s'y faire, & de là naît une force pour vaincre l'obſtacle. C'eſt pourquoi

toutes les forces que l'on découvre dans l'univers, n'ont d'autre origine que la propriété commune à tous les corps de persévérer dans leur état, & qui se change en une force réelle dès qu'il y a une telle opposition entre la maniere d'être de deux ou de plusieurs corps, que l'un ne puisse persister dans son état, sans qu'il arrive quelque changement à celui des autres. C'est ce que l'observation confirme tous les jours. La Méchanique donne des regles pour déterminer ces variations, & pour connoître en quoi consiste le changement qu'éprouvent dans leur état deux corps qui se rencontrent de maniere que ni l'un ni l'autre ne puisse conserver le sien.

C'est sur cette base qu'est fondée toute la doctrine de la résistance que les fluides, tels que l'air & l'eau, opposent aux corps qui s'y meuvent : car un corps solide ne peut se mouvoir dans un pareil fluide, sans déplacer & mettre en mouvement une certaine quantité de particules de ce fluide. Mais ces particules ont, comme tous les autres corps, la propriété de persévérer dans l'état où elles se trouvent ; elles résistent donc à tout changement ; le corps qui les déplace ne peut donc le faire sans perdre une partie de son mouvement ; & il en doit perdre d'autant plus, qu'il déplace un plus grand nombre de ces particules, & qu'elles éprouvent un changement plus considérable. Il suffiroit donc de connoître le changement arrivé dans le fluide, pour déterminer, par les principes de Méchanique, celui du corps même qui s'y meut. C'est en cela seul que consiste la résistance qu'un mobile éprouve dans un fluide.

SECONDE REMARQUE.

L'Auteur considere en premier lieu un fluide dont les molécules soient tellement séparées les unes des autres, qu'elles puissent conserver le mouvement qui leur a été communiqué, pendant quelque temps, & sans aucune altération de la part des autres molécules. Quoique cette notion soit absolument contraire à la nature des fluides, & que nous n'en connoissions aucun qui ait cette propriété, elle peut néanmoins servir au développement des principes sur lesquels les loix de la résistance des fluides sont fondées. Ainsi, lorsqu'un corps se meut dans un milieu de cette espece, il agit continuellement sur de nouvelles particules, parce que celles qui viennent d'être choquées conservent leur mouvement, sans rien changer à l'état des autres ; & si l'on suppose ce fluide dans un état de repos, toutes les particules que le mobile choque à chaque instant, seront aussi dans un repos parfait ; donc, pour évaluer la résistance que le mobile éprouve dans ce fluide, il faut déterminer ce qu'il perd à chaque instant de son mouvement, en choquant un certain nombre de particules en repos, dont on connoîtroit la densité relativement à celle du mobile. Cette estimation peut se faire par le moyen des regles connues du choc des corps, pourvu toutefois que l'on sache si les particules du fluide & le corps lui-même sont élastiques ou non élastiques. Comme ces deux cas présentent des différences très-sensibles, nous les examinerons chacun en particulier.

Suppoſons d'abord que le mobile & les particules du fluide ſont ſans élaſticité, de maniere que celles qui ſont déjà miſes en mouvement, précedent le corps ſans ſe ſéparer de lui, & ſans déranger les autres particules. Pour comprendre ceci plus facilement, il n'y a qu'à s'imaginer que les particules qui viennent d'être choquées ſoient ſubitement anéanties, afin qu'il n'arrive aucun changement dans l'état des autres particules, juſqu'à ce qu'elles ſoient elles-mêmes rencontrées par le mobile. Un pareil fluide n'exiſtant que dans l'imagination, il n'y a point d'inconvénient à lui attribuer encore cette derniere propriété, qui ne rendra que plus facile ce que nous avons à dire ſur cette eſpece de fluide.

Suppoſons donc que la ſurface antérieure du corps MM, (fig. 11), par laquelle il choque les particules du fluide, ſoit plane & perpendiculaire à la direction AM du corps; ſoit l'aire de cette ſurface $= cc$; la longueur LM du corps, que nous ſuppoſerons cylindrique, $= a$, & ſa vîteſſe actuelle $= \sqrt{v}$, ou v la hauteur d'où un corps doit tomber librement pour acquérir cette vîteſſe; ſoit auſſi la denſité du corps exprimée par m, & celle du fluide par n, ce qui donne $macc$ pour la maſſe de ce corps. Pendant que le corps parcourt l'eſpace infiniment petit $Mm = dx$, il choquera les molécules compriſes dans l'eſpace MmmM; & comme la maſſe de ces molécules eſt exprimée par $nccdx$, la queſtion ſe réduit à ſavoir ce que perd de ſon mouvement un corps d'une maſſe $macc$, qui, avec la vîteſſe $\sqrt{v}$, en choque un autre en repos d'une maſſe $nccdx$. La quantité de mouvement du corps choquant, avant le choc,

eſt $= macc\sqrt{v}$; ſa vîteſſe après le choc eſt $= \sqrt{(v + dv)} = \sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}}$, laquelle eſt commune aux molécules $nccdx$ du fluide; donc la ſomme des quantités de mouvement des deux maſſes, après le choc, ſera $= (macc + nccdx)(\sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}})$. Or, par les principes de Méchanique, cette ſomme doit être égale à la quantité de mouvement du corps choquant avant le choc, qui eſt $macc\sqrt{v}$; ou aura donc l'équation $macc\sqrt{v} = (macc + nccdx)(\sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}})$, qui ſe change en celle-ci, $0 = \frac{maccdv}{2\sqrt{v}} + nccdx\sqrt{v}$, d'où l'on tire $dv = -\frac{2nccv}{macc}dx$. On voit donc que le mouvement du corps eſt retardé, comme il le ſeroit par une preſſion équivalente au poids d'un cylindre de cette matiere fluide, dont la baſe $= cc$ & la hauteur $= 2v$; car la maſſe ou le poids de ce cylindre étant $= 2nccv$, & celle du mobile $= macc$, ſon mouvement, pendant qu'il parcourt l'eſpace dx, doit être diminué d'une quantité exprimée par l'équation $dv = -\frac{2nccv}{macc}dx$, qui eſt préciſément la même que la précédente. Ainſi, lorſqu'un corps ſe meut, comme nous venons de le ſuppoſer, dans un pareil fluide, la force de la réſiſtance eſt équivalente au poids d'un cylindre de ce fluide ayant pour baſe la ſurface antérieure du corps $= cc$, & une hauteur double de celle dont un corps devroit tomber pour acquérir la vîteſſe du mobile; & comme la hauteur v eſt proportionnelle au quarré de la vîteſſe, il s'enſuit que dans un fluide de cette

espece, les résistances sont comme les quarrés des vitesses du corps en mouvement; en supposant toutefois que le choc se fait suivant une direction perpendiculaire à la surface antérieure du corps choquant.

Telle est donc la loi de la résistance de cette espece de fluide, lorsque le corps & les molécules sont sans ressort, & qu'il n'y a point de rebroussement après le choc. Mais si le corps & les molécules sont parfaitement élastiques, il faudra recourir aux regles du choc des corps élastiques. Dans ce cas, les molécules du fluide se sépareront du corps, & recevront par conséquent une vitesse plus grande que celle qui reste au corps choquant ; il y a donc deux choses inconnues : la vitesse de ce corps, & celle des molécules après le choc. Pour les déterminer, au principe, que nous venons d'employer, de l'égalité des quantités de mouvement avant & après le choc, il faut joindre cet autre : que dans le choc des corps parfaitement élastiques, les forces vives sont égales avant & après le choc. On sait que la force vive d'un corps est le produit de sa masse par le quarré de sa vitesse : supposons donc, comme ci-dessus, que la vitesse du corps dont la masse $= macc$ soit exprimée par $\sqrt{v}$, & qu'après le choc elle soit $\sqrt{(v + dv)} = \sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}}$; prenons aussi $\sqrt{u}$ pour exprimer la vitesse après le choc de la quantité $nccdx$ des particules du fluide mises en mouvement par le corps choquant, pendant qu'il parcourt le petit espace $Mm = dx$, leur vitesse avant le choc étant $= 0$; la quantité de mouvement sera, avant le choc, $= macc\sqrt{v}$,

& après le choc, $= macc\,(\sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}}) + nccdx\,\sqrt{u}$; ce qui, conformément à la premiere regle, donne l'équation $0 = \frac{maccdv}{2\sqrt{v}} + nccdx\,\sqrt{u}$. La force vive, avant le choc, eſt $= maccv$, & après le choc, $= macc\,(v + dv) + nccudx$, d'où l'on tire cette équation $0 = maccdv + nccudx$. La premiere de ces équations donne $\sqrt{u} = \frac{-madv}{2ndx\sqrt{v}}$ & $u = \frac{m^2a^2dv^2}{4n^2vdx^2}$; la ſeconde donne $u = \frac{-madv}{ndx}$; on a donc $\frac{madv}{4nvdx} = -1$, & $dv = \frac{-4nccvdx}{macc}$. Ainſi, dans ce cas, la réſiſtance eſt équivalente au poids d'un cylindre du fluide, dont la baſe eſt égale à celle cc du corps, & dont la hauteur eſt quadruple de celle d'où la vîteſſe du corps ſeroit acquiſe par la chûte. On voit donc que, dans le cas d'une parfaite élaſticité, la réſiſtance du fluide eſt double de ce qu'on l'a trouvée pour le cas du mobile & du fluide ſans reſſort. Dans l'un & l'autre cas, les réſiſtances ſont proportionnelles aux quarrés des différens degrés de vîteſſe du mobile. Mais ſi le fluide a plus ou moins de denſité, ſa réſiſtance ſera auſſi plus ou moins grande. Etant donc facile, par ce moyen, de connoître les changemens qui arrivent à la vîteſſe d'un corps, il ne le ſera pas moins de déterminer les diminutions ſucceſſives de ſon mouvement.

Nous n'avons examiné juſqu'à préſent que le ſeul cas où la ſurface antérieure du mobile, celle qui choque les molécules du fluide, eſt plane & perpendiculaire à la direction du mou-

vement ; dans ce cas, la force de la résistance étant directement opposée au mouvement du corps, diminue sa vitesse sans changer sa direction. Voyons maintenant comment l'on peut déterminer la résistance qu'un corps éprouve dans un fluide, lorsque sa surface antérieure est inclinée à sa direction ; il sera facile ensuite de trouver la résistance pour toute autre surface, plane ou courbe.

Supposons à cet effet que la figure LLMM (fig. 12.) représente celle du corps qui se meut dans le fluide suivant la direction OP, & dont la surface antérieure MM choque obliquement les particules du fluide. Pendant que le mobile parcourt la longueur $Mm = dx$, il déplace toutes les molécules comprises dans $MmmM$; & si l'on fait la surface $MM = cc$, la quantité de molécules déplacées ne sera plus, comme ci-dessus, $= ccdx$; mais il faudra diminuer cette expression, dans le rapport du sinus total au sinus de l'angle du choc MOP. Soit donc le sinus total $= 1$, & le sinus de l'angle $MOP = q$, la masse des molécules mises en mouvement, pendant que le corps parcourt le petit espace Mm, sera $= nccqdx$; c'est-à-dire qu'il suffiroit de multiplier par q la résistance trouvée ci-dessus, supposé qu'elle dût produire le même effet; mais puisque le choc est oblique, la résistance du fluide doit être moindre que dans le cas précédent, & selon les principes de Méchanique, il faut encore la multiplier par q. Ainsi la résistance de la surface cc, lorsqu'elle choque les molécules du fluide perpendiculairement à sa direction est à la résistance, lorsqu'elle fait avec

la direction du mouvement un angle dont le sinus $= q$, comme le quarré du rayon est au quarré qq du sinus q. Mais le fluide ne résistant que dans le sens perpendiculaire à la surface MM, il faut que la direction de la force résistante soit aussi perpendiculaire à cette surface MM. Donc si la vîtesse du corps est due à la hauteur v, la force de la résistance dirigée suivant OR perpendiculaire à la surface MM, sera égale au poids d'un cylindre du fluide dont la base $= cc$, & la hauteur $= 2qqv$, ou $4qqv$, selon que les corps sont élastiques ou non élastiques. Maintenant, puisque dans le cas présent le corps est repoussé par le fluide suivant une direction OR perpendiculaire à la surface MM, & que cette direction fait un angle oblique avec celle du mouvement, il en résultera, non-seulement de la diminution dans la vîtesse du corps, mais encore du changement dans sa direction : car si l'on décompose la force de la résistance, qui est $2nccqqv$ ou $4nccqqv$, en deux autres, dont l'une soit directement opposée, & l'autre perpendiculaire à la direction du mouvement du corps; la premiere sera $= {}^{2}_{4}\, nccq^3v$, & l'autre, ${}^{2}_{4}\, nccqqv\sqrt{(1-qq)}$; celle-là diminuera la vîtesse du mobile, celle-ci en changera la direction. A la place des deux nombres ${}^{2}_{4}$, nous mettrons la lettre μ qui exprimera 2 pour les corps non élastiques, & 4 pour les corps parfaitement élastiques. Soit aussi P la masse ou le poids du mobile ; il est évident que pendant qu'il parcourt le petit espace $Mm = dx$, sa vîtesse $\sqrt{v}$ diminuera de maniere qu'on aura $dv = \frac{-\mu nccq^3vdx}{P}$, & en même temps le changement

de ſa direction ſera tel, qu'il parcourra une ligne circulaire dont le rayon $= \frac{2P}{\mu n c c q q \sqrt{(1 - qq)}}$ (20). Mais, dès que le corps change de direction, l'obliquité du choc doit auſſi changer, & conſéquemment la valeur du ſinus q. Outre cela, le corps prendra un mouvement de rotation, & choquera les molécules du fluide, par une autre portion de ſa ſurface; ainſi la réſiſtance changeant continuellement, le mouvement du corps deviendra de plus en plus compliqué.

De la réſiſtance qu'éprouve une ſurface plane inclinée à la direction du mouvement, il eſt aiſé de déduire la réſiſtance qu'un fluide oppoſe à tout corps qui s'y meut, quelle qu'en ſoit la figure. Nous conſidérerons principalement les ſolides de révolution qui ſe meuvent ſuivant la direction de leur axe, parce qu'il n'arrive de changement qu'à leur vîteſſe : car ces corps préſentant de toutes parts à l'action du fluide des ſurfaces égales & ſymmétriquement placées, les forces latérales ſe détruiſent mutuellement, & leur effet eſt nul. Soit donc ADB (fig. 13.) la figure génératrice du ſolide de révolution dont nous cherchons la réſiſtance, l'axe de rotation AB étant auſſi la direction du mouvement : ſi ADB eſt un demi-cercle, il eſt évi-

---

(20) Parce que la force qui fait décrire une circonférence de cercle, a un mobile qui a déjà une certaine viteſſe, eſt au poids de ce mobile, comme la hauteur due à cette vîteſſe eſt à la moitié du rayon du cercle décrit : (voyez le Cours de M. Bézout pour l'Artillerie, tome IV. p. 219). Or, cette force eſt ici $= \mu n c c q q v \sqrt{(1 - qq)}$; le poids du mobile eſt $= P$, & la hauteur due à ſa vîteſſe eſt $= v$; donc, &c.

dent

dent que le folide formé par fa révolution eft une fphere. Mais nous établirons d'abord notre calcul généralement fur une figure curviligne quelconque, repréfentée par ADB. Il eft bon, avant tout, de confidérer la portion de la furface qui choque les molécules du fluide, & de la diftinguer du refte du corps : cette portion, contre laquelle le fluide exerce fon effort, eft formée par la révolution de la partie AMD de la courbe, laquelle s'étend de A jufqu'au point D, où la courbe commence à fe rapprocher de l'axe, & où la tangente eft parallele à ce même axe. Soit maintenant une ordonnée MP à l'axe & fon infiniment proche mp ; fi l'on fait AP $= x$, PM $= y$, on aura P$p = dx$; $mn = dy$, & M$m = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, que, pour abréger, nous ferons $= ds$. Le petit arc Mm, par fa révolution autour de l'axe AB, engendre une zone dont la furface $= 2\pi y ds$, π étant le rapport de la circonférence au diametre d'un cercle. Toutes les parties de cette zone choquent les molécules du fluide fous le même angle mMn, dont le finus $= \frac{dy}{ds}$, & le cofinus $= \frac{dx}{ds}$. Si l'on exprime donc la vîteffe du corps par $\sqrt{v}$, & la denfité du fluide par n, la réfiftance qu'éprouve la zone fuivant la droite MC perpendiculaire fur Mm, fera, en mettant $2\pi y ds$ pour cc, & $\frac{dy}{ds}$ pour q, $= \mu n \times 2\pi y ds \times \frac{dy^2}{ds^2} \times v = \frac{2\mu\pi n v y dy^2}{ds}$; & la réfiftance dans le fens du mouvement fera $= \frac{2\mu\pi n v y dy^3}{ds^2}$, dont l'intégrale $= 2\mu\pi n v \int \frac{y dy^3}{ds^2}$ exprime la réfiftance qu'éprouve la furface formée par la révolution de

l'arc AM; & considérant le point M sur le point D, on aura la résistance totale que le fluide oppose au mouvement du solide de révolution.

Pour appliquer ceci à la sphere, il suffit de regarder l'arc AD comme le quart de la circonférence d'un cercle; soit $AC = CD = a$, CP sera $= \sqrt{(aa - yy)}$; $Mm = ds = \frac{a\,dy}{\sqrt{(aa-yy)}}$; $ds^2 = \frac{aady^2}{aa-yy}$; & la résistance trouvée ci-dessus sera $= 2\mu\pi nv \int \frac{ydy(aa-yy)}{aa} = 2\mu\pi nv \left(\frac{1}{2}yy - \frac{y^4}{4aa}\right)$. Pour avoir la résistance totale, on fera $y = a$, & l'on aura $2\mu\pi nv \times \frac{1}{4}aa = \frac{1}{2}\mu\pi nvaa$; mais πaa est la surface d'un grand cercle de la sphere, pour laquelle mettant cc, on aura $\frac{1}{2}\mu nccv$ pour la résistance que la sphere éprouve; & comme on a trouvé $\mu nccv$ pour celle que le fluide oppose à un cylindre dont cc est la base, & qui se meut suivant son axe; il s'ensuit que la résistance d'une sphere n'est que moitié de celle d'un cylindre de même diametre qui se meut avec la même vitesse, suivant la direction de son axe.

TROISIEME REMARQUE.

Comme il n'existe point dans la nature de fluide tel que celui que nous venons de considérer, qu'un tel fluide est même impossible; il est évident que, dans les fluides que nous connoissons, la résistance doit différer de celle qu'on vient de trouver. Nous nous arrêterons principalement à la recherche de la résistance de l'air, & nous remarquerons d'abord qu'outre les propriétés communes à tous les fluides, l'air a aussi celle

d'être dans un état de compreſſion ; que les corps qu'il environne en ſont également preſſés en tous ſens, & qu'un corps en repos y perſiſte dans ſon état de repos. Il en eſt tout autrement d'un corps en mouvement : il ſupporte non-ſeulement la preſſion environnante de l'air, il éprouve encore l'action d'une force réſultante du choc contre les particules de l'air. Mais ſon mouvement ne ſera ralenti que par la derniere de ces deux cauſes tant qu'il y aura équilibre entre les preſſions environnantes ; ce qui arrive quand le mouvement du corps n'eſt pas trop rapide. Mais ſi le corps ſe meut avec une très-grande vîteſſe, l'air ſera ſenſiblement agité autour du corps, qui, par cette raiſon, ne ſera plus également preſſé en tous ſens. Son mouvement ſera donc alors altéré, non-ſeulement par la réſiſtance dont nous venons de parler, mais encore par l'inégalité de preſſion ſur les différentes parties de ſa ſurface. Ce qu'il y a particuliérement à conſidérer ici, c'eſt la partie poſtérieure du mobile, laquelle, quand il eſt en repos, eſt autant preſſée dans un ſens par la preſſion de l'air, que la partie antérieure l'eſt dans le ſens contraire. Mais ſi le corps ſe meut avec aſſez de vîteſſe pour que l'air, en vertu de ſa compreſſion, ne puiſſe point le ſuivre, il peut arriver alors qu'il ne s'exerce aucune preſſion ſur la partie poſtérieure du corps ; & dans ce cas la preſſion ſur la partie antérieure n'étant point contrebalancée, la réſiſtance ſera ſenſiblement augmentée. Il eſt donc aiſé de voir que, même avec une plus petite vîteſſe, la preſſion poſtérieure eſt toujours moindre que l'autre, & qu'ainſi le mouvement du corps doit être retardé, non-ſeulement par la

réaction des particules d'air qu'il choque, mais encore par la pression antérieure, toujours supérieure à celle qui s'exerce sur la partie postérieure du corps. Une autre circonstance à considérer dans l'air, & qui ne se trouve point dans l'eau & dans d'autres fluides, c'est la propriété qu'il a de se condenser & de se dilater, ce qui occasionne de fréquentes variations à sa densité. Il est donc évident que, lorsqu'un corps a un mouvement rapide, il doit, en poussant l'air, le rendre plus dense au devant de lui, qu'en arriere, & que, par cette raison, le corps éprouve une plus forte pression, & par conséquent une plus grande résistance. Or toutes ces causes concourent à ralentir le mouvement du corps, & leur effet est d'autant plus sensible, que la vîtesse du corps est plus grande. L'Auteur a donc eu raison de dire que la résistance, que l'air oppose à un corps qui s'y meut avec une grande vîtesse, est beaucoup plus considérable qu'il ne résulte des théories établies jusqu'à présent.

Il suit de ce qu'on vient de dire, qu'un corps qui se meut dans l'air, est exposé à l'action de deux forces : l'une provient du choc contre les particules de l'air, & occasionne la résistance proprement dite ; l'autre vient de la pression inégale de l'air sur le corps. Quoique ces deux forces agissent ensemble, pour connoître leur influence sur le mouvement du mobile, nous les examinerons séparément, parce que leurs causes sont différentes. Nous considérerons d'abord la premiere de ces deux forces, celle qui provient du choc du corps contre les particules de l'air. Ce choc diminue la vitesse du corps, en ce qu'il y a du mouvement communiqué aux

particules de l'air environnant, car elles réagiſſent avec autant de force que le mobile en emploie pour les mettre en mouvement. Il eſt évident que cette réſiſtance de l'air doit être moindre que dans les deux cas de la remarque précédente. Dans le ſecond cas, lorſque les particules choquées ſe ſéparent du corps choquant, la réſiſtance étoit égale au poids d'un cylindre dont la hauteur $= 4v$; dans le premier où les particules ont, après le choc, une vîteſſe commune avec le corps choquant, la réſiſtance étoit équivalente au poids d'un cylindre d'une hauteur $= 2v$. Mais quand un corps choque les particules de l'air, aucun de ces deux effets n'a lieu, elles refluent vers les côtés du mobile, & conſervent très-peu du mouvement qu'elles ont reçu, ſi le corps n'a pas une très-grande vîteſſe. Le mouvement communiqué aux particules de l'air étant donc beaucoup moindre que dans les deux cas énoncés ci-deſſus, il s'enſuit que ſa réſiſtance eſt auſſi moindre que le poids d'un cylindre dont la hauteur ſeroit $4v$ ou $2v$: c'eſt par cette raiſon que la réſiſtance, que l'air oppoſe à une ſurface cc, qui ſe meut avec une vîteſſe $\sqrt{v}$ perpendiculairement à la direction de ſon mouvement, a été ſuppoſée égale au poids d'une colonne d'air dont la baſe $= cc$, & la hauteur $= v$. L'expérience a auſſi fait voir qu'un corps qui ſe meut dans l'eau, y éprouve une réſiſtance équivalente au poids d'une colonne d'eau d'une hauteur $= v$; & comme les particules de l'eau & de l'air ſe détournent de la même maniere lorſqu'elles ſont rencontrées par un corps en mouvement, on a conclu que la réſiſtance étoit de la même nature dans ces deux fluides.

Pour rendre ceci plus clair, on remarquera que la résistance qu'un corps éprouve dans un fluide en repos, dans lequel il se meut avec une vîtesse donnée, est précisément égale à l'effort que ce même corps auroit à soutenir s'il étoit en repos, & que le fluide vînt à le choquer avec la même vîtesse. Qu'on se représente donc un vase plein d'eau, dont le fond soit percé d'une ouverture que l'on tiendra bouchée avec le doigt : dans cet état, le doigt sera pressé par une force équivalente au poids d'une colonne d'eau dont la base est égale à l'ouverture, & la hauteur à celle de l'eau contenue dans le vase: qu'on écarte ensuite tant soit peu le doigt de cette ouverture, de maniere que l'eau puisse tomber dessus, il est vraisemblable qu'alors le doigt aura la même pression à soutenir qu'auparavant. Or, l'eau s'écoule avec une vîtesse exprimée par la hauteur de l'eau dans le vase; donc la force avec laquelle l'eau choque le doigt est égale au poids d'une colonne d'eau dont la base est égale à l'ouverture, & la hauteur à celle qui exprime la vîtesse de l'eau. Ceci confirme l'opinion, dont nous avons parlé plus haut, que dans l'air & dans l'eau, la résistance étoit équivalente au poids d'un cylindre dont la hauteur est égale à la hauteur v qui exprime la vîtesse.

Pour jeter encore plus de lumiere sur cette théorie, au moyen des principes établis ci-dessus, d'après lesquels la résistance est égale à la force qui seroit nécessaire pour produire le mouvement que prennent les particules du fluide, nous supposerons qu'un corps en repos est placé en CD (fig. 14), & que le fluide vient le

choquer ſuivant la direction AB, avec une vîteſſe $= \sqrt{b}$, égale à celle qu'un corps acquiert en tombant de la hauteur b. Il eſt clair d'abord que ſi toutes les particules du fluide pouvoient conſerver leur mouvement ſans altération, le corps n'auroit aucun effort à ſoutenir. Mais puiſqu'à meſure que ces particules approchent du corps, il faut néceſſairement qu'elles éprouvent du changement dans leur direction & dans leur vîteſſe, & que le corps ait par conſéquent à ſupporter l'effort capable de produire ces changemens de direction & de vîteſſe. Suppoſons que le fluide qui ſe meut en Aa vers le corps avec ſa vîteſſe $= \sqrt{b}$, eſt obligé de ſe détourner ſuivant AaMm, en imaginant à cet effet qu'il coule dans un canal courbe AaMm; au moyen de quoi, non-ſeulement la direction du fluide change continuellement, mais ſa vîteſſe augmente ou diminue, ſelon les différentes largeurs du canal. Soit la premiere largeur A$a = a$ que nous regarderons comme infiniment petite, parce que nous ſuppoſerons un canal particulier pour chaque filet du fluide. Soit auſſi la largeur M$m = z$, & la vîteſſe du fluide à cet endroit $= \sqrt{v}$. Puiſque les vîteſſes d'un fluide qui coule dans un canal ſont en raiſon inverſe des largeurs de ce canal, on aura $a : z :: \sqrt{v} : \sqrt{b}$ & $a\sqrt{b} = z\sqrt{v}$. Si l'on mene l'axe AP perpendiculaire ſur AB, l'ordonnée PM & ſon infiniment proche QN, que l'on faſſe PM $= y$, AP $= x$, on aura PQ $=$ MO $= dx$; ON $= dy$; MN $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$, & la quantité de fluide MmnN ſera exprimée par $z\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Soit en outre $dy = pdx$, on aura MN $=$

$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{(1+pp)}$; & si R est le centre de la courbure du canal en MN, MR sera $= \frac{-dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$ (21). Mais pour faire prendre aux molécules contenues dans MmnN leurs cours suivant cette courbure, il faut une force dirigée suivant MR, & qui soit au poids de ces molécules, comme $2v$ est à $\frac{-dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$; exprimant donc le poids de ces molécules par leur quantité $z\,dx\sqrt{(1+pp)}$, cette force, suivant MR, sera $= \frac{-2vz\,dp}{1+pp}$. De plus, si le canal s'élargit en Mm, la vîtesse diminuera, & il faut à cet effet une force dirigée suivant mS tangente du canal en m; nommant cette force T, on aura $z\,dx\sqrt{(1+pp)}\,dv = -\,T\,dx\sqrt{(1+pp)}$, ou $T = -\,z\,dv$. Ces deux forces MR & mS concourent donc à changer la direction & la vîtesse du fluide à chaque point M du canal AaMm. Pour trouver leur résultante, nous les décomposerons chacune suivant les directions constantes BA & AP. La premiere force MR, qui est $= \frac{-2vz\,dp}{1+pp}$ se décompose suivant BA en une force $= \frac{-2vz\,dp}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}$, & suivant AP en

(21) Le rayon de la courbure, ou de la développée d'une courbe dont les ordonnées sont paralleles, & la concavité tournée du côté de l'axe, est $\frac{-ds^3}{dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$; Or ici $ds = dx\sqrt{(1+pp)}$, & $\frac{dy}{dx} = p$; donc, &c.

une autre $= \frac{-2vzpdp}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}$. L'autre force $mS = -zdv$ donne, suivant BA, une force $= \frac{-zpdv}{\sqrt{(1+pp)}}$, & suivant PA, une force $= \frac{zdv}{\sqrt{(1+pp)}}$. Donc la force qui agit sur la petite portion $MmnN$ suivant la direction BA, est $= \frac{-2vzdp}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}} - \frac{zpdv}{\sqrt{(1+pp)}}$; & suivant AP, $- \frac{2vzpdp}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}} + \frac{zdv}{\sqrt{(1+pp)}}$. Mais on a vu que $z = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{v}}$, on a donc $\frac{-2adp\sqrt{bv}}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}} - \frac{apdv\sqrt{b}}{\sqrt{v}(1+pp)}$ pour l'expression de la force qui agit sur la particule $MmnN$ suivant la direction BA. L'intégrale de cette quantité $= \frac{-2ap\sqrt{bv}}{\sqrt{(1+pp)}} + C$. En déterminant convenablement la constante C, cette intégrale exprimera la force qui produit le changement dans le mouvement de tout le fluide compris dans le canal $AaMm$. Pour y parvenir, on remarquera que quand $AP = 0$, ou quand P est infiniment grand, & $v = b$, la force devient nulle; soit donc $p = \infty$, on aura $C - 2ab = 0$, & $C = 2ab$. Donc pour changer la direction du fluide compris dans le canal $AaMm$, il faut, suivant BA, une force exprimée par $2ab - \frac{2ap\sqrt{bv}}{\sqrt{(1+pp)}} = 2ab\left(1 - \frac{p\sqrt{v}}{\sqrt{b(1+pp)}}\right)$; mais $\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$ est le cosinus de l'angle MNO, ou de l'angle mSB en faisant le rayon $= 1$; cette force est donc $= 2ab\left(1 - \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{b}} \cos mSB\right)$; & c'est-là la force avec laquelle le corps CD

eſt pouſſé ſuivant la direction AB. Or, $2ab$ eſt le poids d'un cylindre du fluide dont la baſe $= Aa = a$, & la hauteur $= 2b$; & $\sqrt{b}$ exprime la viteſſe avec laquelle le fluide choque le corps, ou, ce qui revient au même, avec laquelle le corps choque le fluide. Donc cette force, & par conſéquent la réſiſtance, dépend en partie de la direction Sm que le fluide prend en ſe détournant de ſon chemin, & en partie de la vîteſſe qu'il conſerve après le choc.

Il ſuit de là que ſi le fluide eſt obligé, pour éviter le corps, de ſe détourner perpendiculairement à ſa direction primitive, c'eſt-à-dire, ſi l'angle mSB eſt de 90 degrés, la force qu'on vient de trouver ſera $= 2ab$; & ſi tout le fluide qui rencontre le corps CD ſe détourne ſous le même angle, il en réſultera la même réſiſtance que nous avons trouvée pour le premier cas de la remarque précédente. La même choſe arrivera ſi le fluide perd tout ſon mouvement par le choc. Mais ſi les particules du fluide ſont réfléchies après le choc ſuivant la même direction, & avec la même viteſſe, l'angle mSB ſera de 180°, on aura $\sqrt{v} = \sqrt{b}$, & la force ſera $= 4ab$, ainſi qu'on l'a trouvée pour l'autre cas dans la même remarque.

Si l'on pouvoit donc ſavoir combien chaque filet Aa du fluide dérive & perd de ſa vîteſſe à la rencontre du corps CD, on pourroit auſſi en déduire la force qui agit ſur le corps. Mais il n'eſt pas néceſſaire pour cela de connoître la largeur & la courbure de toutes les parties du canal AaMm, dans lequel on ſuppoſe que le filet Aa ſe meut vers le corps; il ſuffit que ces choſes ſoient connues à l'extrémité du canal:

car la force qui résulte, suivant la direction AB, du filet compris dans la portion A a M *m* du canal, est exprimée, comme on a vu, par la formule $2ab\left(1 - \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{b}}\ cos\ mSB\right)$, ou, à cause de $\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{b}} = \frac{a}{z}$, par la formule $2ab\left(1 - \frac{a}{z}\ cos\ mSB\right)$, dans laquelle z marque la largeur du canal à son extrémité M, & l'angle *m*SB dépend de la position de la partie MN*nm* de ce canal. Tout consiste donc à savoir où est placée la partie extrême de ce canal. En suivant le fluide dans son cours jusqu'à ce qu'il ait environné le corps, & repris sa premiere direction, z sera $= a$, & l'angle *m*SB disparoissant, son cosinus sera $= 1$. Dans ce cas, l'effort que le corps aura à soutenir suivant la direction AB, sera $= 2ab\ (1 - 1) = 0$; c'est-à-dire que le corps n'éprouvera alors aucune résistance; d'où l'on voit que dans l'air & dans l'eau on ne peut prendre pour extrémité du canal, aucun des points où le fluide reprend son premier mouvement; pour en découvrir la cause, il n'y a qu'à examiner avec attention l'origine de la force qui agit sur le corps. Si l'on ne considere que la partie A a M *m* du canal, on a trouvé que la force qui agit sur le corps suivant la direction AB, est $= 2ab\left(1 - \frac{a}{z}\ cos\ mSB\right)$; cette force augmente donc à mesure que l'angle *m*SB devient plus grand, en s'éloignant davantage du commencement A a; c'est-à-dire, tant que le canal s'éloigne du corps en lui présentant sa convexité, la force qui agit sur ce corps suivant la direction AB, reçoit de nouveaux accroissemens. Mais lorsque ce canal tourne sa concavité du côté du corps, & tend

à reprendre sa premiere direction, comme la figure 15 le représente de M en D, l'angle MSB diminue, & par conséquent aussi la force; de maniere que si en Dd le canal est parallele à Aa & de la même largeur, toute la force sera anéantie. Donc si le canal a une figure pareille à celle de la figure 15, il en faudra considérer les deux parties AM, MD séparément : de la premiere qui tourne sa convexité vers le corps, il résulte une force qui agit sur lui suivant la direction AB, & $= 2ab \left(1 - \frac{a}{z} \cos MSB\right)$; la seconde qui présente sa concavité, donne une force opposée à la premiere, & qui pousse le corps suivant la direction BA. Mais un corps ne pouvant être mis en mouvement que par une pression actuelle, cette derniere force ne peut faire son effet sur le corps, qu'autant que le fluide sera assez comprimé derriere lui pour le pousser en avant. Or, dans l'air & dans l'eau, la pression sur la partie antérieure du corps est non-seulement égale à celle qui lui est opposée, mais elle est ordinairement beaucoup plus grande; on voit donc que la force provenante de la portion MD du canal, ne fait point d'effet, ou n'agit que très-foiblement sur le corps. Ainsi, tout l'effort que le filet AMD exerce contre le corps se réduisant à ce qui résulte de la portion AM, on peut conclure que cet effort est exprimé par la formule $2ab \left(1 - \frac{a}{z} \cos MSB\right)$. De là il est aussi aisé de voir que si un fluide étoit tellement constitué, que la force résultante de la portion MD pût avoir tout son effet, de maniere que le corps fût également poussé dans tous les sens, il n'éprouveroit aucune résistance

de la part de ce fluide ; cette propriété pourroit avoir lieu dans une matiere infiniment déliée, infiniment fluide, & comprimée par une force infiniment grande. Telle eſt peut-être la matiere céleſte, l'éther dans lequel les planetes font leurs révolutions, puiſque l'on n'obſerve aucun changement ſenſible dans le mouvement de ces corps. Mais il eſt viſible, par l'effet contraire que cette propriété n'exiſte point dans l'air, ni dans l'eau, ni dans les autres fluides connus, & que leur grande réſiſtance vient principalement de ce que la portion MD, qui préſente ſa concavité au corps, ne pouvant le tirer à elle autant qu'il eſt pouſſé par l'autre partie AM, celle-ci doit produire tout ſon effet.

Pour ſe former une idée plus exacte de la grandeur de cette réſiſtance, concevons un cylindre choqué par un fluide dont la viteſſe ſoit donnée : ſoit OP α Q (fig. 16), la moitié de ce cylindre dont AOQ eſt l'axe, on pourra conclure pour l'autre moitié ce qu'on dira de celle-ci. Soit auſſi AH la moitié de la largeur d'un canal dans lequel le cylindre eſt renfermé, & choqué par l'eau ou l'air qui y paſſe avec une viteſſe connue ; que l'on imagine maintenant ce fluide partagé en une infinité de filets AB, BC, CD, DE, &c. qu'on examine le chemin que chaque filet doit ſuivre dans ſon cours, on conçoit aiſément qu'ils ſe courberont à peu près comme le repréſente la figure 16. Si l'on conſidere enſuite les points *a*, *b*, *c*, *d*, &c. où ces filets commencent à ſe courber vers le cylindre, & qu'on évalue la force, ſuivant la direction AO, qui réſulte de chacun d'eux juſqu'aux points *a*, *b*, *c*, *d*, &c. la ſomme de toutes

ces forces fera la résistance que l'on cherche. Il est aisé de voir que le premier filet AB*ab* se détourne sous un angle droit ; sa résistance est donc $= 2ab$, en prenant *a* pour la largeur de ce filet, & *b* pour la hauteur d'où sa vitesse seroit acquise. Le filet suivant BC*cb* étant moins courbe, doit avoir une moindre force, & par cette raison, la force résultante des autres filets CD, DE, EF, &c. doit toujours aller en diminuant, & devenir enfin nulle. D'où il suit que la résistance totale est beaucoup moindre que le poids d'un cylindre du fluide ayant même largeur que le cylindre choqué, & une hauteur double de celle qui produiroit la vîtesse du fluide dans un corps tombant.

Ce que nous venons de dire d'un corps dont la surface antérieure est plane, & qui choque directement un fluide, s'applique aisément à un corps de toute autre figure. On voit aussi que si cette surface étoit courbe, ou terminée en pointe, la résistance feroit moindre que dans le cas précédent ; car outre que le premier filet ne se courbera point sous un angle droit, la courbure des autres sera aussi moindre qu'auparavant. Nous sommes donc bien éloignés d'être de l'avis de l'Auteur, quand il dit que dans un fluide comprimé, tel qu'on l'a supposé, la résistance ne dépend point de la figure du corps, mais seulement de la grandeur de sa section transversale. On pourra, comme on le voit, en suivant le même procédé, déterminer la résistance que des corps de différentes figures éprouvent dans un fluide comprimé. Il y a lieu de croire aussi que la résistance d'une sphere n'est que moitié de celle d'un cylindre de même

diametre ; & si l'on admet que la résistance d'un cylindre qui se meut dans un fluide suivant la direction de son axe, est égale au poids d'une colonne de ce fluide ayant même base que le cylindre, & pour hauteur celle d'où la vîtesse est acquise, on pourra rendre raison de la plupart des expériences qu'on a faites sur la résistance de l'air & de l'eau.

QUATRIEME REMARQUE.

Ce que nous venons de dire ne doit s'entendre que de cette partie de la résistance qui provient du choc du mobile contre les particules du fluide : c'est de celle-là seulement qu'il a été question jusqu'à présent. Mais il est une autre circonstance qui peut quelquefois augmenter la résistance : c'est, comme on l'a déjà observé, lorsque la pression du fluide est plus forte sur la partie antérieure du mobile, que sur sa partie postérieure. Lorsque le fluide presse également toutes les parties de la surface du corps, comme cela arrive dans le cas d'un mouvement lent, ou qui n'est pas trop rapide ; le corps n'éprouve alors d'autre résistance que celle qui vient de son choc contre les particules du fluide, & que nous avons déterminée ci-dessus. Mais si le corps se meut, dans un milieu tel que l'air, avec assez de vîtesse pour que le fluide ne puisse point le suivre, & remplir aussi-tôt le vuide qu'il laisse derriere lui, il n'y aura point de pression sur sa partie postérieure, ce qui rendra la pression sur le devant d'autant plus considérable, & augmentera la résistance produite par le choc. La question se réduit donc à savoir avec quelle vî-

teſſe l'air eſt capable de pourſuivre un corps qui s'y meut, ou, ce qui revient au même, avec quelle vîteſſe l'air ſe précipite dans un eſpace vuide. Cette vîteſſe dépend de l'élaſticité de l'air, que nous avons exprimée par le poids d'une colonne d'air dont la hauteur = 29100 pieds rhénans : l'air entre donc dans un eſpace vuide, avec la vîteſſe qu'un corps acquerroit en tombant d'une hauteur de 29100 pieds, c'eſt-à-dire, avec une vîteſſe de 1348 pieds par ſeconde. Donc ſi un cylindre ſe meut ſuivant la direction de ſon axe avec une vîteſſe de 1348 pieds par ſeconde, l'air le ſuivra, ſans laiſſer de vuide derriere lui, & ſans agir ſur ſa partie poſtérieure : mais du côté de ſa ſurface antérieure, le cylindre a deux réſiſtances à vaincre; l'une équivalente au poids d'une colonne d'air de même diametre que le cylindre, & de 29100 pieds de hauteur, d'où ſa vîteſſe eſt acquiſe; & l'autre provenante de la preſſion de l'athmoſphere, qui eſt par conſéquent égale à la premiere : donc la réſiſtance totale que l'air lui oppoſe, eſt double de celle qui réſulte ſimplement du choc contre les particules de l'air. Si la vîteſſe du cylindre eſt plus grande qu'on ne vient de le ſuppoſer, non-ſeulement il n'y aura point de preſſion en arriere, mais il reſtera encore derriere lui un eſpace toujours vuide d'air. Si l'on exprime donc par h la hauteur de 29100 pieds, à laquelle eſt due la vîteſſe de l'air, & par v la hauteur d'où ſeroit acquiſe la viteſſe actuelle du cylindre, & que v ſoit plus grande que h, la réſiſtance ſera égale au poids d'une colonne d'air dont la hauteur = v, comme on l'a dit ci-devant; & la preſſion de l'athmoſphere étant

étant équivalente au poids d'une colonne d'air dont la hauteur $= h$, la réſiſtance totale du cylindre, puiſqu'il n'y a point de preſſion ſur ſa partie poſtérieure, ſera égale au poids d'une colonne d'air dont la hauteur $= h + v$; tandis que ſi le cylindre étoit également preſſé de tous côtés, la réſiſtance ne ſeroit exprimée que par la hauteur v. Donc lorſque $v > h$, la réſiſtance, ainſi que notre Auteur l'a obſervé, eſt beaucoup plus grande qu'il ne réſulte de la théorie ordinaire. Mais ſi la vîteſſe du cylindre eſt moindre que la vîteſſe avec laquelle l'air eſt capable de le ſuivre, c'eſt-à-dire, ſi v eſt moindre que h, le cylindre ſera pouſſé en avant avec d'autant plus de force, que v eſt moindre que h. Pour trouver cette force, il n'y a qu'à conſidérer la vîteſſe reſpective avec laquelle l'air pouſſe le cylindre; cette vîteſſe eſt la différence entre la vîteſſe $\sqrt{h}$ de l'air, & celle $\sqrt{v}$ du corps. C'eſt donc comme ſi l'air pouſſoit le corps en avant avec une vîteſſe $= \sqrt{h} - \sqrt{v}$; & comme la hauteur d'où cette vîteſſe ſeroit acquiſe eſt $= h - 2\sqrt{vh} + v$, il ſemble que la preſſion de l'air ſur la partie poſtérieure du cylindre ſoit égale au poids d'une colonne d'air dont la hauteur $= h - 2\sqrt{vh} + v$: mais dans ce cas, comme dans le précédent, le mobile eſt repouſſé en arriere par une force équivalente au poids d'une colonne d'air d'une hauteur $= h + v$: retranchant la premiere de la ſeconde, il reſtera pour la réſiſtance, une colonne d'air dont la hauteur $= 2\sqrt{hv}$. Or ſi cette conſéquence étoit juſte, les réſiſtances ne ſeroient point proportionnelles aux quarrés des vîteſſes, comme on l'a trouvé, mais aux vîteſſes elles-

mêmes; au moins paroît-il que telle devroit être la loi de la réſiſtance, tant que la viteſſe du mobile eſt moindre que celle avec laquelle l'air eſt capable de le ſuivre; & l'on feroit d'autant plus porté à le croire, que le raiſonnement qui nous y a conduits eſt fondé ſur ce principe, que la force de preſſion eſt proportionnelle au quarré de la vîteſſe avec laquelle les particules de l'air choquent le corps, en ſuppoſant que ces particules ſe meuvent actuellement avec une viteſſe égale à celle que l'air prend pour entrer dans un eſpace vuide : car puiſque la preſſion que l'air exerce ſur un corps, produit le même effet que ſi l'air choquoit ce corps avec la vîteſſe réſultante de ſa compreſſion, il paroît que le raiſonnement ci-deſſus n'eſt point abſolument dénué de ſolidité. Quoi qu'il en ſoit, la nature des fluides n'étant point aſſez connue pour que, par la ſeule théorie & ſans le ſecours de l'expérience, on puiſſe déterminer toutes les circonſtances de leur mouvement & de leur maniere d'agir, il ne ſera pas inutile de ſuivre l'idée que nous venons de nous former de l'action de l'air & des autres fluides ſur les corps ſolides, quoique, comme nous le ferons voir dans la ſuite, elle ne puiſſe point être confirmée par l'expérience. On trouve, d'après cette idée, que la preſſion ſur le devant d'un cylindre, qui ſe meut ſuivant la direction de ſon axe, avec la vîteſſe $\sqrt{v}$, eſt différente de ce qu'on l'a trouvée ci-deſſus : car ſi l'on ſuppoſe que l'air va à la rencontre du cylindre avec une vîteſſe $\sqrt{h}$, réſultante de ſa compreſſion, la vîteſſe reſpective du choc ſera $= \sqrt{h} + \sqrt{v}$, due à une hauteur $= h + 2 \cdot \sqrt{hv} + v$. La preſſion ſur le

devant du cylindre sera donc équivalente au poids d'une colonne d'air d'une hauteur $= h + 2\sqrt{hv} + v$; & si la vitesse du cylindre est plus grande que celle de l'air, c'est-à-dire, si $v > h$, il n'y aura point de pression sur la partie postérieure du cylindre, & la résistance qu'il éprouvera sera exprimée par le poids d'une colonne d'air d'une hauteur $= h + 2\sqrt{hv} + v$. Mais lorsque la vitesse $\sqrt{v}$ du cylindre est moindre que $\sqrt{h}$, il y aura sur sa partie postérieure une pression exprimée par $h - 2\sqrt{hv} + v$, comme on l'a vu : cette derniere pression étant ôtée de celle qui agit sur le devant, il reste $4\sqrt{hv}$ pour l'expression de la résistance; d'où l'on voit que, dans ce cas, la résistance est proportionnelle à la vitesse même du corps, & que de plus, elle est d'autant plus grande que le fluide est plus comprimé.

S'il en étoit ainsi de la résistance de l'eau, un cylindre qui s'y meut à différentes profondeurs, avec le même degré de vitesse, y éprouveroit une résistance d'autant plus grande, qu'il seroit plus enfoncé au dessous de la surface de l'eau : les résistances à différentes profondeurs seroient proportionnelles aux racines quarrées de ces profondeurs, ensorte qu'à une profondeur quadruple, la résistance seroit double. Ainsi un poisson qui nage à 40 pieds au dessous de la surface de l'eau, y rencontre une résistance double de celle qu'il éprouveroit à 10 pieds, sa vitesse étant la même, mais moindre que celle qui est due à une hauteur de 10 pieds. Il seroit à desirer, pour appuyer ce raisonnement, que l'on fit des expériences sur la résistance qu'un corps éprouve dans l'eau à différentes profondeurs.

X 2

Cette sorte de résistance peut aussi varier selon d'autres loix, lorsque le mobile n'est pas cylindrique : il ne suffit point alors d'avoir égard à la forme de sa surface antérieure, par laquelle il choque les molécules du fluide ; la courbure de sa surface postérieure doit aussi entrer en considération. Pour mettre ceci dans tout son jour, supposons un corps formé par la révolution d'une courbe AMSB autour de l'axe AB (fig. 17) & mu dans l'air, ou dans tout autre fluide comprimé, suivant la direction de cet axe ; soit $\sqrt{b}$ la vîtesse actuelle de ce corps suivant AE, & $\sqrt{h}$ la vîtesse avec laquelle le fluide entreroit dans un espace vuide, & qui, d'après la maniere dont nous concevons ici la résistance, pourra être prise à la place de la pression qui en résulte. Puisque cette pression s'exerce perpendiculairement sur toutes les parties de la surface du mobile, soit menée la perpendiculaire Nm sur l'arc infiniment petit Mm, cet arc sera pressé de même que si le fluide le choquoit directement avec une vîtesse $= \sqrt{h}$; d'ailleurs le corps étant supposé se mouvoir suivant la direction mF avec une vîtesse $= \sqrt{b}$, on décomposera cette vîtesse suivant une direction perpendiculaire sur mM, qui est celle de la pression du fluide ; la partie de cette vîtesse ainsi dirigée sera $\frac{mn}{Mm}\sqrt{b}$, en menant des points m & M les droites mn perpendiculaire, & Mn parallele à l'axe AB. Soit maintenant AP $= x$; PM $= y$, on aura Pp $=$ Mn $= dx$; $mn = dy$ & Mm $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; si l'on suppose $dy = p\,dx$, on aura Mm $= dx\sqrt{(1 + pp)}$, & $\frac{mn}{Mm}\sqrt{b} = \frac{p\sqrt{b}}{\sqrt{(1+pp)}}$. Donc, l'effort

que l'élément Mm a à ſoutenir, tant de la preſſion que du choc, eſt le même que ſi l'air le choquoit avec une viteſſe $= \sqrt{h} + \frac{p\sqrt{b}}{\sqrt{(1+pp)}}$ ſuivant la direction Nm; cette force eſt par conſéquent égale au poids d'une colonne d'air dont la hauteur $= h + \frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{ppb}{1+pp}$. Et comme cette force eſt dirigée ſuivant mN, on en prendra la partie qui agit ſuivant la direction du mouvement du corps, laquelle ſera $= \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} \left(h + \frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{ppb}{1+pp}\right)$. Mais la zône formée par la révolution de l'arc Mm autour de AB, a le même effort à ſoutenir, & ſa ſurface $= 2\pi y dx \sqrt{(1+pp)}$, π exprimant le rapport de la circonférence au diametre; donc la force qui agit ſur cette zône pour ralentir le mouvement du corps, ſera $= 2\pi ypdx \left(h + \frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{ppb}{1+pp}\right)$.

L'intégrale de cette quantité exprimera la grandeur de la réſiſtance ſur la portion du ſolide formée par la révolution de l'arc AM. Pour avoir la réſiſtance totale, on étendra l'intégrale ſur tout le corps, en ſuppoſant que l'air preſſe toutes les parties de ſa ſurface, ce qui arrive lorſque $\sqrt{b} < \sqrt{h}$. On doit auſſi remarquer que la valeur de cette intégrale augmente en partant du point A, à meſure que les ordonnées y augmentent, c'eſt-à-dire, juſqu'en D; qu'au-delà du point D, en allant vers B, comme alors la valeur de $p = \frac{dy}{dx}$ eſt négative, la réſiſtance ſera diminuée par l'action contraire de l'air ſur la ſurface poſtérieure du corps. Dans

ce cas, le second terme de la quantité $h + \frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{ppb}{1+pp}$ doit avoir le signe —. Ainsi lorsque $b < h$, on étendra l'intégrale $2\pi\int ypdx \left(h + \frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{ppb}{1+pp}\right)$ sur toute la courbe ADB. Mais si la vitesse $\sqrt{b}$ du mobile est plus grande que $\sqrt{h}$, & que l'air ne puisse point le suivre, il y aura une partie BS derriere le corps, sur laquelle l'air n'exercera aucune pression. Pour trouver cette partie, il suffira de chercher le point S où l'air cesse d'agir sur le corps, ce qui arrive lorsque $\sqrt{h} + \frac{p\sqrt{b}}{\sqrt{(1+pp)}} = 0$, c'est-à-dire qu'en menant au point S la perpendiculaire ST sur la courbe, comme alors $\frac{RT}{ST} = \frac{-p}{\sqrt{(1+pp)}}$, le point S doit être trouvé de maniere qu'on ait $\sqrt{h} = \frac{RT}{ST}\sqrt{b}$, ou que $\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{b}} = \frac{RT}{ST}$. Ce point S ainsi déterminé, doit être la limite de l'intégrale ci-dessus. D'où il suit que si la figure de la courbe du côté de B, est telle que la fraction $\frac{RT}{ST}$ soit constamment plus grande que $\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{b}}$, il faudra étendre cette intégrale sur toute la courbe. Donc puisque la résistance est diminuée par la pression sur la partie postérieure, il est évident que, dans le cas de $\sqrt{b} > \sqrt{h}$, la résistance est d'autant moindre, que le corps est plus pointu par derriere. Plusieurs Auteurs prétendent s'être assurés par l'expérience de la vérité de cette circonstance ; ils veulent que la résistance d'un vaisseau ne dépende pas moins de la figure de la pouppe que de celle de la proue, & que l'arriere étant terminé en pointe,

Digitized by Google

contribueroit beaucoup à diminuer la résistance. Quoiqu'il ne soit guere possible que de pareilles expériences soient bien exactes, néanmoins, pour peu que cette circonstance eût lieu, elle serviroit à confirmer cette nouvelle doctrine de la résistance des fluides.

Appliquons-la cependant à la recherche de la résistance qu'une sphere éprouve dans l'air : soit le diametre AB de la sphere $= a$, on aura $yy = 2ax - xx$; $Mm = \frac{ady}{\sqrt{(aa-yy)}}$, &, à cause de $pdx = dy$, $\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{\sqrt{(aa-yy)}}{a}$; donc l'intégrale de la formule sera $= 2\pi \int y dy \left(h + \frac{2\sqrt{bh(aa-yy)}}{a} + \frac{b(aa-yy)}{aa}\right) = \pi hyy - \frac{4\pi(aa-yy)\sqrt{bh(aa-yy)}}{3a} + \frac{4\pi a^2 \sqrt{bh}}{3} + \pi byy - \frac{\pi by^4}{2aa}$. Si $b < k$, il faudra étendre cette intégrale jusqu'au point B, où l'on a $y = 0$; & l'on observera que quand l'abscisse x est plus grande que le rayon a, la quantité $\sqrt{(aa - yy)}$ est négative, c'est pourquoi en changeant le signe du second terme, & faisant $y = 0$, on aura $\frac{8}{3} \pi aa \sqrt{bh}$ pour la résistance. Mais πaa est la surface d'un grand cercle de la sphere, si on l'exprime par cc, le résistance sera $= \frac{8}{3} cc \sqrt{bh}$. Or, on a vu que lorsqu'un cylindre, dont la base $= cc$, se meut dans l'air avec la même vîtesse, il y éprouve une résistance $= 4cc\sqrt{bh}$; donc la résistance d'une sphere, est à la résistance d'un cylindre de même diametre, la vîtesse étant aussi la même, comme 2 est à 3, ce qui n'a lieu cependant que lorsque $b < h$. Si au contraire $b > h$, l'intégrale ne s'étendra point

jusqu'au point B, mais jusqu'à un point S où l'on ait $\sqrt{h} = \frac{-p\sqrt{b}}{\sqrt{(1+pp)}}$, ou bien $\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{b}} = \frac{-p}{\sqrt{(1+pp)}}$; & comme ce point S tombe au-delà du point D par rapport à A, $\sqrt{(aa-yy)}$ sera négative, & l'intégrale sera exprimée par $\pi hyy + \frac{4\pi(aa-yy)\sqrt{bh(aa-yy)}}{3a} + \frac{4}{3}\pi a^3\sqrt{bh} + \pi byy - \frac{\pi by^4}{2aa}$, ou faisant $\sqrt{(aa-yy)} = \frac{a\sqrt{h}}{\sqrt{b}}$, on aura $aa - yy = \frac{aah}{b}$; $yy = \frac{aa(b-h)}{b}$; $y^4 = \frac{a^4(b-h)^2}{bb}$, ce qui donnera la résistance $= \pi aa\left(\frac{1}{2}b + \frac{4}{3}\sqrt{bh} + h - \frac{hk}{6b}\right) = \frac{8}{3}\pi aa\sqrt{bh} + \frac{\pi aa}{6b}(\sqrt{b} - \sqrt{h})^3(3\sqrt{b} + \sqrt{h})$; d'où l'on voit que, lorsque $\sqrt{b} = \sqrt{h}$, la résistance est $= \frac{8}{3}\pi aa\sqrt{bh}$, comme dans le cas précédent.

Soit encore pour exemple un solide formé par la révolution d'un triangle autour d'un de ses côtés AB (fig. 18), & qui se meut dans l'air avec une vitesse $= \sqrt{b}$, suivant la direction BAE de son axe. Ce solide est composé de deux cônes joints ensemble par leur base commune. Soit la hauteur DC du triangle ADB $= a$; les côtés AD $= mb$ BD $= n$, on aura pour la partie antérieure ACD, $\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{a}{m}$, & la résistance qu'éprouvera cette partie sera $= 2\pi\int ydy\left(h + \frac{2a\sqrt{bh}}{m} + \frac{aab}{mm}\right) = \pi aa\left(h + \frac{2a\sqrt{bh}}{m} + \frac{aab}{mm}\right)$. Mais la pression de l'air sur la partie postérieure, lorsque $\sqrt{h} > \frac{a\sqrt{b}}{n}$, pousse le corps en avant avec une force $= \pi aa\,(h -$

$\frac{2a\sqrt{bh}}{n} + \frac{aab}{nn})$; la différence de ces deux forces donne $\pi aa \left(\frac{2a(m+n)\sqrt{bh}}{mn} + \frac{aab(nn-mm)}{mmnn}\right) = \frac{\pi a^3(m+n)}{mn}\left(2\sqrt{bh} + \frac{ab(n-m)}{mn}\right)$, pour la résistance que ce solide éprouve dans l'air. Mais si $\sqrt{h} < \frac{a\sqrt{b}}{n}$, il n'y aura point de pression sur la partie postérieure, & la résistance sera $= \pi aa \left(h + \frac{2a\sqrt{bh}}{m} + \frac{aab}{mm}\right)$. Lorsque $\sqrt{h} > \frac{a\sqrt{b}}{n}$, la résistance est d'autant moindre que la partie postérieure du corps est plus alongée ; si elle est infiniment longue, la résistance sera $= \pi aa \left(\frac{2a\sqrt{bh}}{m} + \frac{aab}{mm}\right)$. Si le corps se meut dans le sens opposé de A vers B, avec la même vîtesse, la résistance, lorsque $\sqrt{h} > \frac{a\sqrt{b}}{m}$, sera $= \frac{\pi a^3(m+n)}{mn}\left(2\sqrt{bh} + \frac{ab(m-n)}{mn}\right)$; d'où l'on voit que si les deux cônes formés par la révolution des triangles ACD, BCD autour de AB, sont d'inégales longueurs, le corps éprouvera une moindre résistance, lorsqu'il choquera le fluide par l'angle le plus aigu. Cette maniere de concevoir la résistance des fluides, pourroit encore nous fournir d'autres conséquences intéressantes, mais nous ne croyons pas devoir nous y arrêter davantage, parce qu'il est encore très-incertain qu'elles s'accordent avec l'expérience. Nous remarquerons néanmoins que tout ce qu'on a dit jusqu'ici vient à l'appui de ce principe de notre Auteur, que si une sphere se meut dans l'air avec plus de vîtesse que ce fluide

n'en a pour le ſuivre, la réſiſtance eſt bien plus grande qu'on ne le penſe communément : car lorſque $\sqrt{b} > \sqrt{h}$, il faut que la quantité $\frac{8}{3}\pi aa\sqrt{bh}$, qui exprime la réſiſtance lorſque $\sqrt{b}$ n'eſt pas plus grand que $\sqrt{h}$, ſoit augmentée de la quantité $\frac{\pi aa}{6b}(\sqrt{b} - \sqrt{h})^3 (3\sqrt{b} + \sqrt{h})$.

Quoi qu'il en ſoit de cette théorie de la réſiſtance de l'air, il eſt certain qu'elle ne peut qu'être augmentée, par la propriété qu'a ce fluide de ſe condenſer & de ſe dilater. Il arrive de là qu'un corps qui ſe meut dans l'air avec une grande viteſſe, doit néceſſairement comprimer celui qu'il pouſſe en avant, & laiſſer à celui qui eſt en arriere la liberté de ſe raréfier; de ſorte que l'air qui eſt en avant étant plus denſe, & l'autre plus rare, la preſſion ſur le devant du corps doit augmenter, celle qui lui eſt oppoſée diminuer, & par conſéquent la réſiſtance devenir plus conſidérable.



PROPOSITION II.

Déterminer par des expériences la résistance que l'air oppose aux corps qui s'y meuvent.

LA machine que nous avons employée pour connoître la vîtesse d'une balle au sortir du canon, peut aussi servir à connoître celle qu'elle conserve à différentes distances : toute la difficulté de ces sortes d'expériences, consiste à diriger le canon de maniere que la balle rencontre dans son chemin la palette du pendule. Le canon dont je me suis servi étoit d'un calibre propre à chasser une balle d'un diametre de $\frac{3}{4}$ de pouce, & la charge pesoit environ la moitié du poids de la balle. J'eus toujours la plus grande attention à peser exactement la poudre, à l'arranger toujours de la même maniere dans le canon, & à m'assurer par plusieurs épreuves qu'à vingt pieds près par seconde, la vîtesse de la balle étoit la même pour tous les coups. Avec ces précautions, je tirai trois coups contre le pendule, à trois distances différentes : la premiere à 25 pieds, la seconde à 75, & la troisieme à 125 pieds de la bouche du canon. Je trouvai qu'au premier coup la balle avoit frappé le pendule avec une vîtesse de 1670 pieds par seconde; au second, avec une vîtesse de 1550 pieds; & au troisieme, avec une vîtesse de 1425 pieds. Donc cette balle en parcourant 50 pieds, a perdu 120 à 125 pieds de sa vîtesse; & comme le temps employé à parcourir cet espace étoit d'environ $\frac{1}{32}$ ou $\frac{1}{30}$ de seconde, il s'ensuit que

dans ces épreuves, la moyenne résistance de l'air équivaloit à une force environ 120 fois plus grande que le poids de la balle, qui étoit de $\frac{1}{12}$ de livre, ou à un poids d'environ 10 ℔ *avoir du poids.*

Si l'on fait le calcul selon la méthode de Newton pour les fluides comprimés, exposée dans la trente-huitieme Proposition du second livre des Principes mathématiques, on trouvera, en supposant l'eau 850 fois plus dense que l'air, que la résistance de l'air contre une balle de $\frac{3}{4}$ de pouce de diametre, qui s'y meut avec une vitesse d'environ 1600 pieds par seconde, n'équivaut qu'à un poids de 4 $\frac{1}{6}$ ℔ *avoir du poids.* Mais nous savons que la méthode de Newton n'est applicable qu'au cas d'un mouvement lent; nous pouvons donc conclure avec certitude que l'air oppose moins de résistance à un mouvement lent qu'à un mouvement rapide, & que le rapport des résistances dans ces deux cas, est comme 4 $\frac{1}{6}$ à 10, c'est-à-dire que ce rapport est entre celui de 1 à 2, & celui de 1 à 3.

J'ai de nouveau chargé le canon ci-dessus avec la même quantité de poudre, & des balles du même poids, & j'ai pris toutes les précautions possibles pour que la vitesse fût la même à tous les coups. Je tirai ainsi trois fois contre le pendule, placé à 25 pieds de la bouche du canon, & je trouvai une vitesse moyenne de 1690 pieds par seconde. Ayant ensuite éloigné le canon du pendule de 175 pieds, je trouvai sur cinq coups une vitesse moyenne de 1300 pieds par seconde; voilà donc, dans un trajet de 150 pieds, une perte pour la vitesse de 390 pieds par seconde. La résistance a donc été,

dans ces dernieres épreuves, un peu plus forte que dans les précédentes; elle eſt équivalente à un poids de 10 à 12 ℔ *avoir du poids*, ce qui donne entre les réſiſtances pour les mouvemens rapides & les mouvemens lents, un rapport plus approchant de celui de 3 à 1, que par les épreuves précédentes.

M'étant ainſi aſſuré de la réſiſtance de l'air pour une vîteſſe de près de 1700 pieds par ſeconde, vîteſſe aſſez grande pour qu'il reſte un eſpace vuide d'air derriere le mobile, j'ai cherché la réſiſtance pour de moindres degrés de vîteſſe. Le fuſil ayant été chargé de la même maniere quant à la balle, mais avec une charge plus foible, je tirai cinq fois contre le pendule, à la diſtance de 25 pieds, & je trouvai une vîteſſe moyenne de 1180 pieds par ſeconde. Ayant enſuite tiré cinq fois à la diſtance de 250 pieds, la vîteſſe moyenne fut trouvée de 950 pieds par ſeconde; c'eſt-à-dire que, dans un trajet de 225 pieds, la balle a perdu 230 pieds de ſa vîteſſe par ſeconde; & comme cet eſpace a dû être parcouru en $\frac{1}{4}$ de ſeconde à peu près, il s'enſuit que, pour ce degré moyen de vîteſſe, la réſiſtance de l'air eſt $33\frac{1}{2}$ fois plus grande que le poids de la balle, ou de 2 livres 10 onces *avoir du poids*. Mais par la théorie ordinaire, elle feroit les $\frac{7}{11}$ de ce poids; donc la réſiſtance de l'air, la vîteſſe du mobile étant de 1065 pieds, ne ſe trouve plus augmentée que ſuivant le rapport de 7 à 11, tandis que pour un plus haut degré de vîteſſe, ce rapport approchoit beaucoup de celui de 1 à 3.

Je tirai enſuite trois balles du même poids pardeſſus une eau dormante, de maniere qu'on pût

obſerver le point de leur chûte dans l'eau, & le temps employé à faire le trajet depuis le canon juſqu'au point de chûte; j'avois ſi bien pris mes meſures pour m'aſſurer de la vîteſſe de ces balles, que je pouvois y compter à 10 pieds près au plus par ſeconde : elle étoit de 400 pieds par ſeconde. La premiere balle parcourut 313 yards (939 pieds) avant de toucher l'eau, & y parvint en $4\frac{1}{4}$ ſecondes. La ſeconde parcourut de même 319 yards (957 pieds) en 4 ſecondes, & la troiſieme 373 yards (1119 pieds) en $5\frac{1}{2}$ ſecondes. Suivant la théorie de la réſiſtance pour des mouvemens lents, le premier eſpace auroit dû être parcouru en $3'',2$, le ſecond en $3'',28$, & le troiſieme en $4''$. D'où l'on voit qu'à chacun de ces coups le mouvement des balles a été plus retardé qu'il n'auroit dû l'être par la théorie de Newton; par conſéquent la réſiſtance de l'air eſt encore ſenſiblement plus grande que ſuivant cette théorie, lors même que le mobile n'a qu'une vîteſſe de 400 pieds par ſeconde.

Il ſuit de toutes ces expériences, que la doctrine de la réſiſtance de l'air établie par Newton pour les mouvemens lents, & confirmé par diverſes expériences, ne peut s'appliquer ſans erreur aux mouvemens rapides des balles & des boulets, puiſqu'il y a tel degré de vîteſſe qui rend la réſiſtance près de trois fois plus grande qu'il ne réſulte de cette théorie. Mais cette augmentation dans la réſiſtance diminue, à meſure que la vîteſſe du mobile devient moindre; elle s'anéantit enfin, & la réſiſtance eſt conforme à cette même théorie, lorſque la vîteſſe du mobile eſt fort petite. La réſiſtance ne ſuit donc pas le rapport du quarré des vîteſſes, comme

Digitized by Google

on le penſe communément ; elle s'écarte d'autant plus de cette loi, que la viteſſe du mobile eſt plus grande, & que le fluide qui eſt en avant ſe trouve plus comprimé. On peut donc conclure qu'on n'a eu juſqu'à préſent que de fauſſes notions ſur la réſiſtance de l'air, & que la courbe qu'on a fixée en conſéquence pour être la trajectoire des projectiles, n'eſt point le chemin qu'ils parcourent réellement ; ce qui n'a pu qu'arrêter les progrès qu'auroit dû faire la ſcience de l'Artillerie. Mais il ne ſuffit pas d'avoir démontré que la réſiſtance de l'air, lorſque le mobile a une très-grande viteſſe, eſt beaucoup plus conſidérable qu'on ne l'avoit penſé, il faut encore, pour déterminer le mouvement des projectiles, connoître la loi que ſuit cette réſiſtance, relativement à chaque degré de viteſſe du mobile : c'eſt ce que nous allons examiner dans la Propoſition ſuivante.

PREMIERE REMARQUE.

L'Auteur rapporte dans cette Propoſition des expériences qui méritent attention, & dont on peut ſe ſervir pour déterminer la réſiſtance que l'air oppoſe à des mouvemens rapides. Quoique les viteſſes qu'il a déduites de ſes premieres épreuves puiſſent, ainſi qu'on l'a déjà vu, être révoquées en doute, à cauſe de pluſieurs circonſtances qu'il paroît avoir négligées, & qu'en outre ſon calcul porte ſur un faux principe ; cependant comme l'erreur ne peut être que fort peu conſidérable, nous regarderons ces expériences comme ſuffiſamment exactes, d'autant plus que, faute d'une deſcription aſſez détaillée

Digitized by Google

des épreuves faites avec le pendule, il ne feroit pas poffible de corriger l'erreur qui peut s'être gliffée dans le calcul. Voyons donc d'abord combien la doctrine ordinaire de la réfiftance de l'air s'écarte de la vérité, dans les expériences que l'Auteur vient de rapporter, & examinons à cet effet ce qu'un mobile perd de fa viteffe primitive, pendant qu'il parcourt un efpace donné. Quoique la ligne décrite par la balle ne foit pas une ligne droite, fa courbure eft fi peu fenfible, que l'on peut fe difpenfer d'y avoir égard. Nous fuppoferons donc qu'une balle fe meut dans l'air fuivant la ligne AB (fig. 19), & que fa pefanteur fpécifique eft à celle de l'air comme *n* eft à 1. Suppofant auffi que l'eau eft 850 fois plus pefante que l'air, la lettre *n* aura différentes valeurs, felon la matiere dont la balle peut être compofée, comme on le voit dans la Table fuivante.

MATIERE de la balle.	*Plus pefante que l'eau de pluie.*	*Valeurs de la lettre* n.
Or de coupelle	.. 19,080 ..	.. 16218
Argent de coupelle	.. 10,480 ..	.. 8908
Plomb	.. 11,350 ..	.. 9647
Cuivre	.. 8,840 ..	.. 7514
Fer	.. 7,820 ..	.. 6647
Laiton	.. 8,412 ..	.. 7150
Ivoire	.. 1,826 ..	.. 1552
Marbre	.. 2,710 ..	.. 2303

La

Digitized by Google

La balle ayant un diametre $= c$, ſon poids ſera égal à celui d'une colonne d'air de même diametre, & d'une hauteur $= \frac{2}{3} nc$. Soit la vîteſſe de la balle en A $= \sqrt{b}$, ou ſoit b la hauteur d'où elle devroit tomber par ſa peſanteur pour acquérir cette vîteſſe ; & lorſqu'elle ſera parvenue en M, après avoir parcouru AM $= x$, ſoit la vîteſſe $= \sqrt{v}$. Si la balle éprouvoit la même réſiſtance qu'un cylindre de même diametre, cette réſiſtance ſeroit égale au poids d'une colonne d'air d'une hauteur $= v$; mais la réſiſtance de la balle n'étant que moitié de celle du cylindre, $\frac{1}{2} v$ ſera la hauteur de la colonne d'air dont le poids exprime la réſiſtance que la balle éprouve : cette réſiſtance eſt donc au poids de la balle comme $\frac{1}{2} v$ eſt à $\frac{2}{3} nc$, ou comme $\frac{3v}{4nc}$ eſt à 1. Mais pendant que la balle parcourt l'eſpace infiniment petit M$m = dx$; on a l'équation $dv = \frac{-3vdx}{4nc}$, dont l'intégrale eſt $\frac{3x}{4nc} = l\, \frac{b}{v}$, où $l\, \frac{b}{v}$ exprime le logarithme hyperbolique de la fraction $\frac{b}{v}$, ou bien l'on a $\frac{3x}{4nc} = 2\, l\, \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{v}}$: & ſi l'on prend e pour le nombre dont le logarithme hyperbolique eſt 1, on aura $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{v}} = e^{\frac{3x}{8nc}}$ ou $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{b}} = e^{\frac{-3x}{8nc}}$. Or, dans cet exemple, $\frac{3x}{8nc}$ eſt une très-petite fraction, on aura donc, à peu près, $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{b}} = 1 - \frac{3x}{8nc} + \frac{9xx}{128nncc}$; donc $\frac{\sqrt{b} - \sqrt{v}}{\sqrt{b}} = \frac{3x}{8nc} - \frac{9xx}{128nncc}$. Appliquons cette formule au premier exemple

de l'Auteur : la balle étant de plomb, on a $n = 9647$; $c = \frac{1}{4}$ de pouce ; la viteſſe en A ou $\sqrt{b} = 1670$ pieds par ſeconde ; nous pouvons prendre ce nombre pour $\sqrt{b}$, parce qu'il ne s'agit ici que du rapport de $\sqrt{b}$ à $\sqrt{v}$. De plus la balle, après avoir parcouru 50 pieds, avoit une viteſſe de 1550 pieds par ſeconde ; on a donc $x = 50$; $\frac{x}{c} = 800$; $\frac{3x}{8c} = 300$, & $\frac{3x}{8nc} = \frac{300}{9647} = 0{,}03109$, & par conſéquent $\frac{9xx}{128\,nncc} = 0{,}00048$; & comme $\sqrt{v} = 1550$, on aura $\frac{\sqrt{b} - \sqrt{v}}{\sqrt{b}} = \frac{120}{1670} = 0{,}07185$; or ce nombre, qui devroit être égal à 0,03061, en eſt plus que double, donc la réſiſtance eſt deux fois plus grande qu'on ne l'a ſuppoſée ; ce qui s'accorde aſſez bien avec la remarque de l'Auteur. Nous avons ajouté que la réſiſtance d'une ſphere n'étoit que moitié de celle d'un cylindre de même diametre ; notre Auteur prétend au contraire que ces deux ſolides éprouvent la même réſiſtance. Si nous avions donc ſuppoſé que la réſiſtance de ces corps fût deux fois auſſi grande, au lieu du nombre 0,03061, nous aurions trouvé 0,06029, qui approche plus de 0,07185, & rapprocheroit auſſi davantage la théorie commune de la vérité : le ſurplus de la réſiſtance qu'on a trouvé, pourroit alors être attribué à la condenſation de l'air au devant de la balle. Cependant, comme il n'eſt pas vraiſemblable que la réſiſtance ſoit la même pour une ſphere & un cylindre de même diametre, nous aimons mieux attribuer avec l'Auteur cette augmentation, à toute autre cauſe. Nous examine-

rons aussi dans la suite si, pour un mouvement lent, la résistance doit être exprimée par la hauteur entiere v, ou seulement par sa moitié.

Dans la seconde expérience de l'Auteur, la balle, après avoir parcouru 100 pieds, avoit une vitesse de 1420 pieds par seconde. On a donc selon la même regle, $\sqrt{b} = 1670$; $\sqrt{v} = 1424$, donc $\frac{\sqrt{b}-\sqrt{v}}{\sqrt{b}} = \frac{250}{1670} = 0,1497$. Or, $\frac{3x}{8nc} = 0,06219$. Il faudroit donc que $0,1497 = 0,06026$; d'où l'on voit encore que la résistance résultante de cette regle est trop petite. On voit aussi que ces deux expériences donnent presque le même rapport entre la vraie résistance & celle qu'on a supposée, ce rapport étant, dans l'une & l'autre, comme 2,40 est à 1.

Dans la troisieme expérience, la balle a été chassée du canon avec une vitesse de 1690 pieds par seconde, & elle en avoit une de 1300 pieds, après avoir parcouru 150 pieds, ce qui donne $\sqrt{b} = 1690$; $\sqrt{v} = 1300$; $\frac{\sqrt{b}-\sqrt{v}}{\sqrt{b}} = \frac{390}{1690} = 0,23077$, & $\frac{3x}{8nc} = 0,09329$. Il faudroit donc que $0,23077 = 0,08894$; d'où il suit que la résistance de la théorie est à celle de l'expérience, comme 1 est à 2,59. Cette expérience ne s'accorde pas bien avec les précdentes; car puisque la balle a été plus loin, la différence auroit dû être moindre, d'après l'Auteur lui-même, que dans les deux premieres expériences, la théorie devant donner des résultats d'autant plus exacts, que la vîtesse du mobile est plus petite.

La quatrieme expérience a été faite avec une balle de même poids, mais qui n'avoit en A

qu'une vîteſſe de 1180 pieds, qui, au bout de 225 pieds, a été réduite à 950 pieds; ce qui donne $\sqrt{b} = 1180$; $\sqrt{} = 950$; $\frac{x}{c} = 3600$, & $\frac{3x}{8nc} = 0,13994$. Il faudroit donc, ſelon la théorie, qu'on eût $0,13994 = l\,\frac{1180}{950} = l\,\frac{118}{95} = 0,21681$. La réſiſtance ſuppoſée eſt donc encore trop petite dans ce cas, & elle eſt à celle de l'expérience, comme 1 eſt à 1,549; ce qui s'accorde aſſez avec le rapport de 7 à 11, que l'Auteur a trouvé. Donc puiſque la différence diminue à meſure que la vîteſſe du mobile eſt plus petite, on peut admettre ſans erreur que, dans le cas d'un mouvement lent, la réſiſtance d'une ſphere n'eſt que moitié de celle d'un cylindre de même diametre.

L'examen des autres expériences exige une autre ſorte de calcul : car outre la vîteſſe initiale de la balle, on donne le temps qu'elle a mis à parcourir un eſpace donné. Soit, comme ci-devant, la vîteſſe en A $= \sqrt{b}$, celle en M $= \sqrt{v}$; l'eſpace AM $= x$, on aura l'équation : $\sqrt{v} = e^{-\frac{3x}{8nc}}\sqrt{b}$. Si t eſt le temps employé à parcourir AM, on aura $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{e^{3x:8nc}\,dx}{\sqrt{b}}$, dont l'intégrale eſt $t = \frac{8nc\left(e^{3x:8nc}-1\right)}{3\sqrt{b}} = \frac{8nc}{3b}\left(e^{3x:8nc}-1\right)\sqrt{b}$.

Pour faire uſage de cette formule, on réduira b en milliemes de pieds de Rhin, & l'on diviſera le nombre qui les exprime par 250, le quotient ſera le temps t exprimé en ſecondes.

Mais nous avons vu que si, après avoir réduit b en milliemes de pieds de Rhin, on divise $\sqrt{b}$ par 4, le quotient sera le nombre de pieds que la vîtesse du mobile lui fera parcourir en une seconde. Si donc la balle a en A une vîtesse de m pieds de Rhin par seconde, on aura $\frac{\sqrt{b}}{4} = m$, $b = \frac{16mm}{1000}$ pieds de Rhin, ou $\frac{16mm}{970}$ pieds anglois; & le temps $t = \frac{8nc}{3b}\left(e^{3x:8nc} - 1\right) \cdot \frac{m}{62,5}$ secondes. Ainsi lorsque le temps t est exprimé en secondes, on a $e^{3x:8nc} = 1 + \frac{1875bt}{80mnc}$, ou $\frac{3x}{8nc} = l\left(1 + \frac{1875bt}{80mnc}\right)$. Si cette équation a effectivement lieu dans quelqu'expérience, ce sera une preuve que la résistance supposée est la véritable; sinon elle indiquera la différence en plus ou en moins entre les résultats de la théorie & ceux de l'expérience.

Lorsque $\frac{3x}{4nc}$ est un très-petit nombre, la premiere équation peut se changer en celle-ci: $t = \frac{mx}{62,5b}\left(1 + \frac{3x}{16nc} + \frac{9xx}{16 \cdot 24n^2c^2} + \&c.\right)$; ou bien, à cause de $b = \frac{16mm}{970}$ pieds anglois, $t = \frac{97x}{100m}\left(1 + \frac{3x}{16nc} + \frac{9xx}{16 \cdot 24n^2c^2} + \&c.\right)$; ou enfin lorsque la vîtesse initiale $\sqrt{b}$ est donnée en pieds anglois, & que ce nombre de pieds est exprimé par m, on aura $t = \frac{x}{m}\left(1 + \frac{3x}{16nc} + \frac{9xx}{16 \cdot 24n^2c^2} + \&c.\right)$ secondes. Il suffit dans cette formule que les quantités x, m & c expriment une même mesure, parce qu'il n'y est question que de

rapports. Il eſt auſſi à remarquer que, la grandeur abſolue de la réſiſtance étant déſignée par la fraction $\frac{3}{8n}$, ſi la théorie donne une réſiſtance trop petite, il ne s'agira plus que de chercher quelle fraction plus grande il faudra ſubſtituer à la place de $\frac{3}{8n}$, pour établir l'égalité.

Dans les dernieres expériences de l'Auteur, on a, comme dans les autres, $c = \frac{3}{4}$ de pouce, & $n = 9647$; la viteſſe initiale étoit de 400 pieds par ſeconde, faiſant donc $m = 400$, il faudra auſſi réduire les autres quantités à cette meſure. La premiere balle a parcouru 313 yards ou 939 pieds anglois en $4'', \frac{1}{4}$; on a donc $x = 939$; $\frac{x}{m} = 2,3475$; $\frac{x}{c} = 15024$, & $\frac{3x}{8nc} = 0,58401$: mettant ces valeurs dans l'équation, on aura $4,25 = 3,18839$; d'on l'on voit que la théorie donne une réſiſtance trop petite. L'Auteur, en ſuivant cette même théorie, a trouvé $3'',2$, ce qui s'accorde aſſez bien avec notre réſultat. Pour obtenir une parfaite égalité, il faudroit ſuppoſer une réſiſtance preſque double : mais il paroît qu'on ne doit pas s'en rapporter tout-à-fait à cette expérience, puiſque, dans la ſuivante, la balle a été de 6 yards plus loin dans un temps plus court, en 4 ſecondes, ce qui rend l'augmentation de la réſiſtance moins grande. Dans cette ſeconde expérience, on a $x = 957$; $\frac{x}{m} = 2,3925$; $\frac{x}{c} = 15312$, & $\frac{3x}{8nc} = 0,59521$, ce qui donne $4 = 3,2696$. Pour que l'égalité eût lieu, il faudroit que la réſiſtance, & par conſéquent la fraction

$\frac{3x}{8nc}$ fût plus grande : ſoit $\frac{3x}{8nc} = z$, il faut que $\frac{4}{2,3925} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \frac{z^3}{24} + \frac{z^4}{120} +$ &c. $= 1,6718$, ou $\frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \frac{z^3}{24} + \frac{z^4}{120} +$ &c. $= 0,6718$; d'où l'on tire $z = 0,9556$. Cela fait voir que la réſiſtance de la théorie eſt à celle de l'expérience, comme 0,59521 eſt à 0,9556, c'eſt-à-dire, comme 1 eſt à 1,6055. Mais cette différence paroît encore beaucoup trop grande, puiſque dans la quatrieme expérience de la Propoſition précédente, la viteſſe initiale étant plus de cinq fois plus grande que dans celle-ci, le rapport entre ces deux réſiſtances n'a été trouvé que comme 1 à 1,549. Au reſte, les réſultats de ces ſortes d'épreuves ſont toujours très-incertains : la moindre négligence, la plus légere inattention, peuvent occaſionner des différences très-conſidérables. Tout l'avantage qu'on peut retirer de ces expériences, eſt donc de ſe convaincre que, pour des mouvemens rapides, la théorie donne une trop petite réſiſtance, & que cette réſiſtance s'écarte d'autant plus de la vérité, que la viteſſe du mobile eſt plus grande (22).

---

(22) Le calcul de la viteſſe reſtante & du temps, peut ſe faire plus ſimplement & ſans le ſecours des approximations, de la maniere qui ſuit : de l'équation $dv = \frac{-3v\,dx}{4nc}$ on tire $\frac{3dx}{4nc} = \frac{-dv}{v}$; dont l'intégrale eſt $\frac{3x}{4nc} = -lv +$ une conſtante qu'on détermine, en obſervant que $v = b$ lorſque $x = o$, ce qui donne $o = -lb + C$, & $C = lb$; donc $\frac{3x}{4nc} = -lv + lb$, & $lv = lb -$

$\frac{3x}{4nc}$; ou bien, en réduisant les logarithmes hyperboliques à ceux des tables, $lv = lb - \frac{3x}{4nc} \times 0{,}43429448$; c'est-à-dire que la hauteur v est exprimée par un nombre dont le logarithme ordinaire est $lb - \frac{3x}{4nc} \times 0{,}43429448$; & la vitesse due à cette hauteur est $\sqrt{60{,}4\,v}$, si les mesures sont prises en pieds de Roi ; & $\sqrt{64{,}4}$, quand il s'agit de pieds anglois.

Prenons pour exemple la seconde des premieres expériences de l'Auteur, dans laquelle $\sqrt{b} = 1670$ pieds anglois, $x = 100$, & $\sqrt{v} = 1425$.

Calcul de la vitesse restante.

$l\,\frac{3x}{4nc}$: : . : : :	9,0947889
$l\,0{,}43429448$	9,6377843
$l\left(\frac{3x}{4nc} \times 0{,}43429448\right)$	8,7325732 dont le nombre
est . .	0,0540223 à retrancher
de lb . . .	4,6365471
on aura lv : : : :	4,5825248
$l\,64{,}4$ . . .	1,8088859
$l\,64{,}4v$: .	6,3914107
$l\,\sqrt{64{,}4v}$ . .	3,1957053 = l 1569.

ce qui fait voir que, selon cette théorie, la résistance, au bout de 100 pieds, n'auroit que 101 pieds de la vitesse initiale, tandis qu'elle en a réellement détruit 245 pieds; donc la résistance de la théorie est à celle de l'expérience, comme 101 est à 245 :: 1 : 2,426.

Pour calculer le temps, prenons l'expérience où l'Auteur a observé qu'avec une vitesse initiale de 400 pieds par seconde, la balle a parcouru 939 pieds en $4\frac{1}{4}$ secondes : on cherchera d'abord la vitesse restante au bout de cet espace, que l'on trouvera de 223 pieds, ce qui donne

$\sqrt{b} - \sqrt{v} = 177$, le temps ſe trouvera par le calcul ſuivant.

Calcul du temps.

$l\,\frac{8nc}{3}$ . . .	3,2062411
$l\,(\sqrt{b} - \sqrt{v})$	2,2479733
comp. $l\,\sqrt{b}$.	7,3979400
comp. $l\,\sqrt{v}$.	7,6515748
	0,5037292 $= l\,3'',1895$

SECONDE REMARQUE.

Pour compléter ce traité de la réſiſtance de l'air, nous allons examiner celle que ce fluide oppoſe à un mouvement lent, tel que celui d'un corps qui tombe librement par ſa peſanteur : il eſt facile, dans ce cas, de déterminer la force de la réſiſtance, en obſervant le temps que le mobile emploie à tomber d'une hauteur donnée: car puiſqu'on connoit le temps qu'un corps met à tomber d'une certaine hauteur dans le vuide, & que dans l'air ce temps eſt plus long, il eſt clair que cette différence indiquera la force de la réſiſtance. L'air produit ici deux effets : outre la réſiſtance qu'il oppoſe au mouvement, il diminue encore le poids du mobile d'une quantité égale au poids d'un même volume d'air. Soit A (fig. 20) une ſphere qui commence ſa chûte au point A, & ſe meut ſuivant la verticale AB; ſoit ſon diametre $= c$, & le rapport de ſa peſanteur à celle de l'air, comme n eſt à 1; ſon poids ſera diminué d'une quantité $= \frac{1}{n}$. Suppoſons-la déjà arrivée en P; AP $= x$, & la viteſſe en P $= \sqrt{v}$: la force de la peſanteur

en P sera exprimée par $1 - \frac{1}{n}$, celle de la résistance par $\frac{3v}{4nc}$, & la loi de l'accélération par l'équation $dv = \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{3v}{4nc}\right) dx$; d'où l'on tire $\frac{3dx}{4nc} = \frac{3dv}{4nc-4c-3v}$, dont l'intégrale est $\frac{3x}{4nc} = l\, \frac{4(n-1)c}{4(n-1)c-3v}$. Prenant donc e pour le nombre dont le logarithme hyperbolique est 1, c'est-à-dire, $e = 2,718281828459$, on aura $e^{\frac{3x}{4nc}} = \frac{4(n-1)c}{4(n-1)c-3v}$, ou $1 - \frac{3v}{4(n-1)c} = e^{\frac{-3x}{4nc}}$; ce qui donne $v = \frac{4(n-1)c}{3}\left(1 - e^{\frac{-3x}{4nc}}\right)$, & $\sqrt{v} = \sqrt{\frac{4(n-1)c}{3}\left(1 - e^{\frac{-3x}{4nc}}\right)}$. Si l'on exprime ensuite par t le temps employé à descendre de A en P, t étant un nombre de secondes, on aura $dt = \frac{dx}{250\sqrt{\frac{4(n-1)c}{3}\left(1-e^{\frac{-3x}{4nc}}\right)}}$, & $t = \frac{\sqrt{3}}{500\sqrt{(n-1)c}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}}$; dont l'intégrale est $t = \frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}$ $l\, \frac{1+\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}}{1-\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}}$, ou $t = \frac{2n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}$ $l\left(1+\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}\right) + \frac{x\sqrt{3}}{500\sqrt{(n-1)c}}$.

Lorsque la fraction $\frac{3x}{4nc}$ a une très-petite valeur, on fera, pour abréger, $\frac{4nc}{3} = m$, &

l'on aura $e^{\frac{-x}{m}} = 1 - \frac{x}{m} + \frac{x^2}{2m^2} - \frac{x^3}{6m^3} + \frac{x^4}{24m^4} -$ &c. donc $l\left(1 + \sqrt{}\left(1 - e^{\frac{-x}{m}}\right)\right) = l\left(1 + \sqrt{}\left(\frac{x}{m} - \frac{x^2}{2m^2} + \frac{x^3}{6m^3} - \frac{x^4}{24m^4} + \text{\&c.}\right)\right)$. Prenant la valeur de ce logarithme par approximation, & la ſubſtituant dans la derniere expreſſion du temps t, on aura $t = \frac{2n\sqrt{cx}}{125\sqrt{3(n-1)m}} \left(1 + \frac{x}{12m} + \frac{x^2}{480m^2} - \frac{x^3}{2688m^3} \text{ \&c.}\right)$, ou $t = \left(1 + \frac{x}{12m} + \frac{x^2}{480m^2} - \frac{x^3}{2688m^3} - \frac{x^4}{91260m^4} \text{ \&c.}\right) \times \frac{1}{125}\sqrt{\frac{nx}{n-1}}$. Dans le terme $\sqrt{\frac{nx}{n-1}}$, la hauteur x eſt exprimée en milliemes du pied de Rhin.

Pour donner un exemple de l'uſage de cette formule, & faire voir en même temps combien elle s'accorde avec l'expérience, nous en prendrons une de celles que Newton a faites dans l'Egliſe de St. Paul à Londres, & qu'il rapporte dans ſon livre des Principes mathématiques. Il laiſſa tomber une boule de verre d'une hauteur de 220 pieds anglois ; le diametre de cette boule étoit de 5 pouces, & ſon poids de 483 grains. Un pareil volume d'eau peſeroit 16600 grains, & d'air $\frac{16600}{850}$ ou 19,53 grains, en ſuppoſant l'eau 850 fois plus peſante que l'air. On a donc $c =$ 5 pouces, &, parce que la boule de verre peſeroit 502,53 grains dans le vuide, $n = \frac{502,53}{19,53} =$ 25,73; $x = 220$ pieds; $m = 171,5$; &, à cauſe

de $x = 2640$ pouces, on aura $\frac{x}{m} = \frac{26400}{1715} = 15,3935$. Mais la fraction $\frac{x}{m}$ n'ayant point ici une valeur assez petite, pour que l'approximation ci-dessus puisse avoir lieu, on se servira de la premiere équation $t = \frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}} l \frac{1+\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}}{1-\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}}$, où c doit être réduit en milliemes de pieds de Rhin. On aura donc $c = 404,166$, & $\frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}} = 0,48044$. Faisons, pour plus de simplicité, $\frac{x}{m} = 15,3935 = \alpha$, on aura $t = 0,48044\, l \frac{1+\sqrt{(1-e^{-\alpha})}}{1-\sqrt{(1-e^{-\alpha})}}$ secondes. Soit $e^{-\alpha} = z$, on aura $lz = -\alpha le$; mais $e = 2,718281828$, on a donc par les logarithmes ordinaires, $le = 0,43429448$, & $lz = -15,3935 \times 0,43429448 = -6,6853$; donc $z = \frac{1}{4845100}$. D'un autre côté $z = e^{-\alpha}$ étant un très-petit nombre, on peut faire $\sqrt{(1-z)} = 1 - \frac{1}{9690200}$, ce qui donne $t = 0,48044\, l\, 19380400$ secondes. Le logarithme ordinaire de 19380400 est 7,287363, lequel étant multiplié par 2,30258509, donne le logarithme hyperbolique, qui sera $= 16,7797$, & par conséquent $t = 8,0616$ secondes. Mais Newton a trouvé par l'observation la plus exacte, que ce temps étoit de 8″,2; la boule a donc mis un peu plus de temps, qu'on ne le trouve par la théorie, à tomber de la hauteur de 220 pieds; la résistance qu'elle a éprouvée est donc plus grande que celle qui résulte de cette théorie.

Mais la différence eſt très-petite, & comme une légere erreur eſt preſqu'inévitable dans de pareilles obſervations, il n'eſt guere poſſible d'en conclure la vraie grandeur de la réſiſtance.

Newton s'y eſt pris d'une autre maniere pour calculer cette expérience, & d'autres de la même eſpece : il a déterminé par le temps donné quelle devoit être, ſuivant la théorie, la hauteur de la chûte, & il l'a toujours trouvée un peu plus grande qu'elle n'eſt en effet; d'où il ſuit clairement que la réſiſtance réelle eſt un peu plus grande qu'il ne réſulte de la théorie. Cela confirme l'aſſertion de l'Auteur, que, pour des mouvemens rapides, la théorie donne une réſiſtance trop foible. Dans cette même expérience, la boule avoit, à la fin de ſa chûte, une viteſſe d'environ 29 pieds par ſeconde, vîteſſe déjà aſſez grande pour produire une augmentation dans la réſiſtance. Les calculs de cet exemple, & d'autres ſemblables, où la quantité $e^{-\frac{3x}{4nc}}$ a une très-petite valeur, peuvent ſe faire de la maniere ſuivante : puiſqu'on peut, ſans erreur ſenſible, ſuppoſer $\sqrt{(1 - e^{-3x:4nc})} = 1 - \frac{1}{2} e^{-3x:4nc}$, on aura $t = \frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}$.

$$l\,\frac{2 - \frac{1}{2} e^{-3x:4nc}}{\frac{1}{2} e^{-3x:4nc}} = \frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}\, l\, 4 e^{3x:4nc};$$

ou $t = \frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}\, l\, 4 + \frac{x\sqrt{3}}{500\sqrt{(n-1)}}$. Or $l\,4 =$ 1,38629436, donc $t = \frac{n\sqrt{c}}{\sqrt{(n-1)}} \left(0{,}0064030 + 0{,}0034641\ \frac{x}{nc}\right)$. Veut-on, dans ce cas,

connoître l'espace x par le moyen du temps t? On aura $0,0034641 \frac{x}{nc} = \frac{t\sqrt{(n-1)}}{n\sqrt{c}} - 0,0064030$; donc $x = 288,675 \times t\sqrt{c}(n-1) - 1,8484\,nc$; ou $\frac{x}{nc} = 288,675 \times \frac{t\sqrt{(n-1)}}{n\sqrt{c}} - 1,8484$. Dans le terme $\frac{t\sqrt{(n-1)}}{n\sqrt{c}}$, t exprime le temps en secondes, & c le diametre réduit en milliemes du pied de Rhin. Mais dans l'exemple précédent, on a $t = 8'',2$; $c = 404,166$ & $n = 25,73$; donc $nc = 128,65$ pouces anglois, $= 10,72$ pieds anglois; d'où l'on tire $\frac{x}{10,72} = 20,9086$, & $x = 224,14$ pieds anglois, espace plus grand que la hauteur de 220 pieds que la balle a parcourue dans ce temps. Mais la différence n'est que de 4 pieds que la boule auroit dû parcourir en $\frac{1}{7}$ de seconde; & comme une aussi petite portion du temps ne peut guere être observée, on voit que la théorie de Newton s'accorde assez bien avec l'expérience, lorsque le mouvement n'est pas trop rapide (23).

(23) Cette remarque renferme des calculs qui pourroient arrêter plusieurs de nos Lecteurs, en faveur desquels nous joindrons ici quelques éclaircissemens. Commençons par l'intégration de la quantité différentielle $\frac{dx}{\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}}$: pour intégrer cette quantité, on la préparera en la multipliant d'abord au numérateur par $e^{-\frac{3x}{4nc}}$, & au dénominateur par $(1 + \sqrt{(1 - e^{-3x:4nc})}) \times (1 - \sqrt{(1 - e^{-3x:4nc})}) =$

$e^{-3x:4nc}$, on aura $\frac{dx}{\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}} =$

$$\frac{e^{-3x:4nc}\,dx}{\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}\cdot\left(1+\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}\right)\cdot\left(1-\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}\right)};$$

cette derniere quantité étant encore multipliée & divisée par $1 - \sqrt{(1 - e^{-3x:4nc})}$ & par $\frac{4nc}{3}$, se change en celle-ci : $\frac{4nc}{3} \times \frac{\frac{3dx}{4nc}e^{-3x:4nc}}{\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}\cdot\left(1-\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}\right)^2}$ $\times \frac{1-\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}}{1+\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}}$; c'est-à-dire, en une fraction dont le numérateur feroit $\frac{4nc}{3} \times$ $\frac{\frac{3dx}{4nc}e^{-3x:4nc}}{\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}\cdot\left(1-\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}\right)^2}$, & le dénominateur $\frac{1+\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}}{1-\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}}$: Or, sous cette nouvelle forme, le numérateur est la différentielle du logarithme du dénominateur ; donc l'intégrale de $\frac{dx}{\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}}$ est $\frac{4nc}{3}\, l\, \frac{1+\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}}{1-\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}}$; ce qui donne $t =$ $\frac{n\sqrt{c}}{\sqrt{48,3(n-1)}}\, l\, \frac{1+\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}}{1-\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}}$, le diametre c étant évalué en pieds anglois. De cette valeur de t on tire $x = \frac{4nc\, l\, \frac{(m+1)^2}{4m}}{3\, l\, e}$, par les logarithmes des tables ; m étant un nombre dont le logarithme ordinaire est $\frac{t\sqrt{48,3(n-1)}}{n\sqrt{c}} \times 0,43429448$. Si c est évalué en pieds de Roi, on mettra 45,3 à la place de 48,3. Nous ferons

voir tout-à-l'heure l'usage de cette derniere formule, qui donne la hauteur x de la chûte par la connoissance du temps t, sans le secours d'aucune approximation.

M. Euler transforme ensuite l'équation $t = \frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}$ $l\,\frac{1+\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}}{1-\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}}$ en celle-ci : $t = \frac{2n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}$ $l\left(1+\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}\right) + \frac{x\sqrt{3}}{500\sqrt{(n-1)}}$: pour cela, il faut, dans la premiere équation, multiplier la fraction qui est sous le signe logarithmique, haut & bas par $1 + \sqrt{\left(1-e^{-3x:4nc}\right)}$, ce qui la change en celle-ci : $t = \frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}\ l\,\frac{\left(1+\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}\right)^2}{e^{-3x:4nc}}$ $= \frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}} \times 2\,l\left(1+\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}\right)$ $- \frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}\ le^{-3x:4nc}$; mais $le^{-3x:4nc} =$ $\frac{-3x}{4nc}$, parce que $le = 1$: on a donc enfin $t =$ $\frac{2n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}}\ l\left(1+\sqrt{(1-e^{-3x:4nc})}\right) +$ $\frac{x\sqrt{3}}{500\sqrt{(n-1)}}$.

Enfin, la suite de ce calcul est fondée sur ce que, par la théorie des logarithmes, on a en général $e^{\pm z} = 1$ $\pm z + \frac{z^2}{2} \pm \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} \pm$, &c. & que $l(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} -$ &c.

Voyons maintenant une application de la formule $x =$ $\frac{4ncl\frac{(m+1)^2}{4m}}{3le}$ trouvée ci-dessus, dans laquelle m est un nombre dont le logarithme ordinaire est $\frac{t\sqrt{48,3\,(n-1)}}{n\sqrt{c}}$ $\times\ 0,43429448$. Prenons pour cela l'exemple calculé par M.

M. Euler, dans lequel on a $c = 5$ pouces $= 0,41666$ pieds anglois, $n = 25,7312$, & $t = 8,2$ secondes.

Calcul de la hauteur de la chûte.

	$l t$	0,9138139
	$l \sqrt{48,3}$	0,8519735
	$l \sqrt{(n-1)}$ . . .	0,6966224
comp.	$l n$	8,5895402
comp.	$l \sqrt{c}$	0,1901057
	$l\ 0,43429448$ . .	9,6377843
		0,8698400 dont le nombre
	eft : :	$7,4103717 = lm$
	donc $m =$	25725965
	$l(m+1)^2$ . . .	14,8207435
	$l 4m$	8,0124317
	$l \frac{(m+1)^2}{4m}$ . . .	6,8083118
	$l \left(l \frac{(m+1)^2}{4m}\right)$	0,8330394
	$l \frac{4nc}{3}$	1,1551871
comp.	$l(lc)$	0,3622157
		$2,3504422 = 224,10$.

M. Euler a trouvé 224,14; on voit donc que les approximations qu'il a employées ne font qu'une très-petite erreur de 4 centiemes de pieds.

Nous ajouterons ici, sur l'accélération du mouvement des corps qui tombent dans l'air, quelques réflexions qui trouvent naturellement leur place à la suite de cette Remarque.

Puisque la vîteffe d'un mobile qui tombe librement va en augmentant, la réfiftance que l'air oppofe à fon mouvement doit auffi augmenter; & comme l'action de la

pesanteur est constante, on sent bien que la résistance de l'air doit enfin parvenir à un degré de force capable de détruire le nouveau degré de vitesse, que la pesanteur tend à ajouter à chaque instant à la vitesse actuelle du mobile. Pour examiner cette circonstance, reprenons l'équation $dv = \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{3v}{4nc}\right) dx$, par laquelle on connoîtra la plus grande vitesse qu'un mobile puisse acquérir dans sa chûte, en faisant $dv = o$, ce qui donne $v = \frac{4(n-1)c}{3}$, & la vitesse qui en résulte, c exprimant des pieds anglois, sera $= \sqrt{64,4\, v} = \sqrt{\frac{257,6}{3}(n-1)c}$: c'est-à-dire que *la plus grande vitesse qu'un corps sphérique puisse acquérir en tombant dans l'air, est due à la chûte dans le vuide d'une hauteur, qui est à quatre fois le tiers de son diametre, comme la différence entre les densités du mobile & de l'air, est à la densité de l'air.* La valeur de v, qu'on vient de trouver, étant mise dans l'équation $\frac{3x}{4nc} = l\, \frac{4(n-1)c}{4(n-1)c-3v}$, le dénominateur du second membre sera zéro, ce qui rend x infiniment grand; d'où l'on voit que le mobile ne peut jamais acquérir la vitesse $\sqrt{\frac{257,6}{3}(n-1)c}$ par sa chûte d'une hauteur finie, ou, ce qui revient au même, que cette vitesse est l'asymptote des vitesses acquises du mobile. Si l'on applique ceci à la boule de verre dont nous venons de parler, on trouvera qu'elle ne peut jamais parvenir, en tombant dans l'air, à une vitesse de 29,746027 pieds anglois par seconde. Il suit encore de là que le mouvement d'un corps qui tombe dans l'air doit être uniforme, du moins sensiblement, pendant une certaine partie de la durée de sa chûte : pour savoir ce qui en est, prenons la valeur de v dans l'équation $\frac{3x}{4nc} = l\, \frac{4(n-1)c}{4(n-1)c-3v}$; on aura $v = \frac{p-1}{p} \times \frac{4}{3}(n-1)c$, p étant le nombre dont le logarithme ordinaire est $\frac{3x}{4nc} \times 0,43429448$. Appliquant le calcul à la même boule, on trouvera qu'en

tombant de 220 pieds de hauteur, la vîteſſe acquiſe eſt 29,746020 pieds, qui eſt déjà, à moins de ſept millioniemes près, la plus grande vîteſſe qu'elle puiſſe acquérir.

Troisieme Remarque.

Il ſuit évidemment de ce qui précede, & il ſeroit facile de le prouver par d'autres expériences, que, pour des mouvemens lents, la doctrine de la réſiſtance de l'air, donnée par Newton & ſuivie par tous les Savans, eſt auſſi exacte qu'on peut raiſonnablement le deſirer. On peut donc, dans ce cas, admettre pour principe, 1°. que la réſiſtance qu'un corps éprouve eſt proportionnelle au quarré de ſa vîteſſe; 2°. que la réſiſtance d'un cylindre, qui ſe meut dans l'air ſuivant la direction de ſon axe, eſt égale au poids d'une colonne d'air de même diametre, & d'une hauteur égale à celle dont un corps devroit tomber pour acquérir la vîteſſe du cylindre; 3°. que la réſiſtance d'une ſphere n'eſt que moitié de celle d'un cylindre de même diametre. Il n'eſt pas moins vrai que, pour déterminer la réſiſtance qu'éprouvent des corps de toute autre figure, on peut faire uſage de la méthode que nous avons employée ci-deſſus, quoiqu'il ne ſoit guere poſſible de ſoumettre ces corps à l'expérience, pour en comparer les réſultats avec ceux du calcul.

Puiſque, dans la recherche de ces vérités, nous n'avons conſidéré que la ſurface antérieure du corps, ne peut-on pas conclure que la figure de la ſurface oppoſée n'a que peu d'influence ſur la grandeur de la réſiſtance? Si cela eſt ainſi, les principes qui nous ont paru être une ſuite naturelle de ce que nous avons expoſé dans nos remarques ſur la Propoſition précédente, per-

dent beaucoup de leur force ; & la méthode sur-tout qui nous a conduits à conclure la résistance proportionnelle à la vîtesse, doit être tout-à-fait abandonnée : car il seroit contradictoire que la résistance fût en même temps proportionnelle à la vîtesse, & au quarré de la vîtesse. En effet, quoiqu'il soit possible que dans tout mobile il y ait un degré de vîtesse tel que chacun de ces deux rapports donne la même résistance, toujours est-il certain que, pour tous les autres degrés, il en résultera des résistances différentes : c'est-à-dire, qu'à un plus grand degré de vîtesse, répondra une plus grande résistance dans l'hypothese des quarrés des vîtesses, que dans celle des simples vîtesses ; & qu'au contraire si le corps se meut moins vîte, le rapport des simples vîtesses donnera une plus grande résistance que celui des quarrés des vîtesses. Or, cette considération pourroit faire soupçonner qu'il est des cas où ces différences se compensent, & où par conséquent les deux théories pourroient s'accorder avec la vérité : & ce qui paroît confirmer ce soupçon, c'est que, dans des mouvemens lents, l'expérience fait trouver la résistance plus grande que ne la donne la théorie ordinaire. Je n'examinerai point ici l'opinion de ceux qui attribuent cet excès de résistance à la tenacité du fluide : mais pour jeter plus de lumiere sur tout ceci, nous allons rapporter quelques exemples, calculés d'après la théorie développée ci-dessus.

Supposant le diametre de la sphere $= c$; sa vîtesse $= \sqrt{b}$; la vîtesse avec laquelle l'air s'élance dans le vuide $= \sqrt{h}$; la résistance d'un cylindre de même diametre sera égale au poids

d'une colonne d'air de même base, & dont la hauteur $= 4 \sqrt{bh}$. La résistance de la sphere sera égale au poids d'une colonne d'air ayant aussi pour base un grand cercle de cette sphere, & sa hauteur $= \frac{8}{3} \sqrt{bh}$, mais dans le cas seulement où $b < h$: car lorsque $b > h$, la hauteur de la colonne d'air dont le poids exprime la résistance, sera $= \frac{8}{3} \sqrt{bh} + \frac{1}{6b} (\sqrt{b} - \sqrt{h})^3 (3 \sqrt{b} + \sqrt{h})$: h étant toujours $= 29100$, ce dernier cas a lieu lorsque la sphere a plus de 1348 pieds de vîtesse par seconde. Or, suivant la théorie ordinaire, la résistance de la sphere seroit égale au poids d'une colonne d'air dont la hauteur $= \frac{1}{2} b$; il faudroit donc, pour que la résistance de cette sphere fût la même dans les deux théories, qu'on eût $\frac{1}{2} b = \frac{8}{3} \sqrt{bh}$, ce qui donneroit $\sqrt{b} = \frac{16}{3} \sqrt{h}$: c'est-à-dire, que la vîtesse de la sphere devroit être de 7189 pieds par seconde; & dans le cas d'une vîtesse moindre, $\frac{8}{3} \sqrt{bh}$ sera toujours plus grand que $\frac{1}{2} b$, dans la raison de $\frac{16 \sqrt{h}}{3 \sqrt{b}}$ à 1. Ainsi, cette nouvelle théorie donneroit pour une vîtesse de 30 pieds par seconde, une résistance 239 fois plus grande qu'elle ne seroit suivant la théorie ordinaire. Mais celle-ci s'accordant assez exactement avec l'expérience, l'autre ne peut que s'éloigner prodigieusement de la vérité. Et quand on diroit que, pour des causes qui nous sont inconnues, il est possible que la vîtesse avec laquelle l'air s'élance dans le vuide, ne soit pas aussi grande que nous l'avons supposée, on ne parviendroit pas à garantir cette théorie du reproche de fausseté; car en supposant la vîtesse $\sqrt{h}$ de 1000 pieds par seconde, & même plus

petite, on trouveroit toujours la résistance beaucoup trop grande pour les mouvemens lents; & la résistance qu'on trouveroit pour les mouvemens rapides, seroit beaucoup plus petite que celle que donne la théorie ordinaire, qui, comme on l'a vu, la suppose trop foible pour les mouvemens de cette espece. La fausseté de cette nouvelle théorie est si évidente, qu'il est inutile d'employer d'autres argumens pour la combattre. Nous ajouterons seulement que dans ces sortes de recherches, on ne sauroit être trop attentif à éviter les erreurs où une méthode peut nous conduire, & dont il est très-difficile de s'appercevoir : au reste, tout ceci peut au moins servir à confirmer la théorie ordinaire de la résistance que les fluides opposent à des mouvemens lents. Nous verrons par la suite comment elle peut être corrigée & portée à un tel degré de perfection, qu'elle puisse être appliquée à des mouvemens fort rapides.



Digitized by Google

PROPOSITION III.

Déterminer les différentes augmentations de la résistance de l'air, relativement aux différens degrés de vîtesse des corps qui s'y meuvent.

La vîtesse des projectiles de l'Artillerie, tels que les boulets & les bombes, n'allant jamais dans la pratique au-delà de 1700 pieds par seconde, je n'ai point fait d'expérience pour connoître la résistance que l'air oppose à des vîtesses plus grandes. Il m'a paru que, pour remplir l'objet de cet Ouvrage, il suffisoit de déterminer la variation de la résistance pour toutes les vîtesses moins considérables.

D'après les expériences que j'ai faites, la résistance que l'air oppose à des vîtesses moindres que celles de 1700 pieds par seconde, peut être déterminée assez exactement par la regle suivante.

Soient prises les deux lignes AB, AC (fig. 21) dans le rapport de la vîtesse de 1700 pieds par seconde, à la vîtesse pour laquelle on cherche la résistance. Prolongeant ensuite AB en D de façon que BD soit AD, comme la résistance de l'air à des mouvemens très-lents est à sa résistance à la vîtesse de 1700 pieds par seconde, on aura CD est à AD comme la résistance de l'air aux mouvemens lents, est à la résistance qu'il oppose à la vîtesse donnée, représentée par AC.

PREMIERE REMARQUE.

Après avoir établi d'une maniere inconteftable la théorie de la réfiftance de l'air pour des mouvemens lents, & obfervé que pour des mouvemens rapides, cette théorie donne une réfiftance trop foible ; on voit que, dans ce dernier cas, la réfiftance doit être augmentée, pour que la théorie s'accorde avec l'expérience. Nous avons auffi fait voir que cette augmentation de réfiftance eft produite par deux caufes : 1°. l'air ne pouvant fuivre un corps dont le mouvement eft très-rapide, il ne fe fait aucune preffion fur la partie poftérieure de ce corps ; d'où il arrive que la preffion de l'air fur fa partie antérieure n'étant point contrebalancée, doit rendre la réfiftance plus grande : 2°. l'air qui précede le mobile devient par cette même caufe plus denfe, ce qui augmente fa preffion, & par conféquent la réfiftance. Si nous avions une connoiffance affez parfaite de la nature de l'air, pour être en état d'évaluer les effets de ces deux caufes, la théorie de la réfiftance de ce fluide auroit bientôt acquis toute la perfection dont elle eft encore fufceptible : mais nos connoiffances fur ce fujet étant on ne peut plus bornées, tout ce que nous pouvons faire eft de confulter l'expérience, & d'en tirer le plus de lumieres qu'il eft poffible. C'eft en fuivant ce guide, le plus sûr en Phyfique, que l'Auteur eft parvenu à déterminer la réfiftance que l'air oppofe aux mouvemens rapides : & comme fes expériences ne s'étendent point à des vîteffes plus grandes que de 1700 pieds par feconde, il s'eft contenté de donner

une regle propre à déterminer la réſiſtance relative à tous les degrés inférieurs de viteſſe, conformément aux réſultats de ſes expériences. Pour mieux développer les principes dont cette regle eſt déduite, nous examinerons d'abord les mouvemens lents, pour leſquels on ſait que l'expérience & la théorie donnent les mêmes réſultats.

Si un globe ſe meut dans l'air avec une vîteſſe égale à celle qu'il acquerroit en tombant d'une hauteur $= v$, la réſiſtance qu'il éprouve eſt égale au poids d'une colonne d'air de même diametre, & d'une hauteur $= \frac{1}{2} v$. Ce principe ſuffit pour trouver la vraie grandeur de la réſiſtance, lorſque la hauteur v n'eſt pas trop grande. Mais ſi cette hauteur eſt telle qu'il en réſulte une viteſſe de 1000 pieds ou plus par ſeconde, nous avons vu que la réſiſtance étoit alors beaucoup plus grande que $\frac{1}{2} v$, & que, pour une viteſſe de 1700 pieds par ſeconde, la hauteur de la colonne d'air dont le poids eſt égal à la réſiſtance, devient à peu près $= \frac{3}{2} v$. Donnons à cette hauteur une expreſſion générale, & ſuppoſons que la vraie réſiſtance d'un globe eſt égale au poids d'une colonne d'air de même diametre, & d'une hauteur $= \theta v$. Il eſt clair que θ repréſente ici une quantité variable, telle qu'elle ſoit $= \frac{1}{2}$, lorſque la hauteur v n'eſt pas fort grande; que la valeur de cette quantité augmente avec celle de v, & qu'elle devienne enfin $= \frac{3}{2}$ lorſque la viteſſe du globe ſera de 1700 pieds par ſeconde; c'eſt-à-dire, lorſque la hauteur v ſera à peu près de 46400 pieds anglois. Il s'agit donc de trouver pour θ une expreſſion telle que v ayant une petite valeur, on ait $\theta = \frac{1}{2}$; & $\theta = \frac{3}{2}$ lorſque $v =$

46400. Cette lettre θ exprime ce que L'Auteur appelle la force résistante de l'air; & c'est la valeur de cette lettre qu'il détermine dans cette Proposition, relativement à chaque degré de vitesse du mobile.

Pour trouver la valeur de θ par la regle que l'Auteur donne, soit f la hauteur dont un corps devroit tomber pour acquérir la vitesse de 1700 pieds par seconde, ou $\sqrt{f} = 1700$; & $\sqrt{v}$ la vitesse pour laquelle on cherche la résistance, ou la valeur de θ. Soit de plus α la valeur de θ lorsque $\sqrt{v} = \sqrt{f}$, on aura dans ce cas $\alpha = \frac{3}{2}$ à peu près; & lorsque $\sqrt{v}$ exprime une très-petite valeur, θ deviendra $= \frac{1}{2}$; soit la droite $AB = a$ (fig. 21) : l'Auteur établit d'abord la proportion suivante : $AB\ (a) : AC :: \sqrt{f} : \sqrt{v}$, qui donne $AC = \frac{a\sqrt{v}}{\sqrt{f}}$. La seconde analogie de l'Auteur est $BD : AD :: \frac{1}{2} : \alpha$, qui se transforme en celle-ci : $AB : AD :: \alpha - \frac{1}{2} : \alpha$; d'où l'on tire $AD = \frac{2a\alpha}{2\alpha - 1}$; mais $AC = \frac{a\sqrt{v}}{\sqrt{f}}$, donc $CD = \frac{2\alpha a\sqrt{f} - (2\alpha - 1)a\sqrt{v}}{(2\alpha - 1)\sqrt{f}}$. Enfin il fait $CD : AD :: \frac{1}{2} : \theta$, ce qui donne $\theta = \frac{AD}{2CD}$ $= \frac{\alpha\sqrt{f}}{2\alpha\sqrt{f} - (2\alpha - 1)\sqrt{v}}$; la résistance d'un globe qui se meut dans l'air avec une vitesse $= \sqrt{v}$, est donc égale au poids d'une colonne d'air de même diametre que le globe, & dont la hauteur $= \frac{\alpha\sqrt{f}}{2\alpha\sqrt{f} - (2\alpha - 1)\sqrt{v}}$. Cette valeur de θ a les conditions demandées; car lorsque la vitesse $\sqrt{v}$ est très-petite, le terme $(2\alpha - 1)\sqrt{v}$ s'évanouit par rapport à $2\alpha\sqrt{f}$, & θ devient

en ce cas $= \frac{1}{2}$: mais lorsque la vîtesse $\sqrt{v}$ est de 1700 pieds, ayant alors $\sqrt{v} = \sqrt{f}$, θ deviendra $= \frac{3}{2}$, comme on le demande. La valeur de θ diminue pour de moindres degrés de vîtesse, comme on le voit par la Table suivante, dans laquelle on a supposé $\alpha = \frac{1}{2}$.

Vîtesses par seconde en pieds d'Angleterre.	*Force résistante de l'air, ou valeurs de la lettre θ.*
0	. . . 0,5000
100	. . . 0,5204
200	. . . 0,5425
300	. . . 0,5667
400	. . . 0,5930
500	. . . 0,6219
600	. . . 0,6538
700	. . . 0,6892
800	. . . 0,7286
900	. . . 0,7727
1000	. . . 0,8226
1100	. . . 0,8793
1200	. . . 0,9444
1300	. . . 1,0200
1400	. . . 1,1087
1500	. . . 1,2143
1600	. . . 1,3421
1700	. . . 1,5000

Il eſt aiſé de voir que la valeur que nous venons de trouver pour θ, ne peut s'appliquer à des vîteſſes plus grandes; car ſi $\surd v = \frac{2a\surd f}{2a-1}$, c'eſt-à-dire, ſi la vîteſſe étoit de 2550 pieds par ſeconde, la valeur de θ ſeroit infiniment grande, d'où réſulteroit une réſiſtance infinie, ce qui eſt abſurde. L'Auteur l'a très-bien ſenti : auſſi a-t-il averti que ſa regle ne peut être employée que pour des vîteſſes au deſſous de 1700 pieds par ſeconde. Malgré cette précaution, il n'eſt pas poſſible qu'une regle qui s'écarte ſi fort de la vérité pour les grandes vîteſſes, devienne parfaitement exacte dès qu'on l'applique à des vîteſſes un peu moindres. Au reſte, il n'eſt pas difficile de trouver une infinité de formules pour la valeur de θ, qui ſatisferoient aux deux conditions, de donner $\theta = \frac{1}{2}$ pour les petites vîteſſes, & $\theta = \frac{3}{2}$ lorſque la vîteſſe ſera de 1700 pieds par ſeconde. Il n'eſt donc queſtion que d'en choiſir une qui ne ſoit pas ſujette à l'abſurdité qu'on eſt en droit de reprocher à celle de l'Auteur; & il paroît qu'on feroit mieux d'exprimer la réſiſtance par la formule $\frac{1}{2}v + pv^n$, p étant un très-petit nombre, & $n > 1$. Cette formule eſt très-propre à ſatisfaire aux deux conditions, que v étant fort petit, le terme pv^n diſparoiſſe par rapport à $\frac{1}{2}v$, & que ce terme pv^n devienne double de $\frac{1}{2}v$, lorſque v eſt très-grand, comme de 46400 pieds.

Pour ſatisfaire à la premiere de ces conditions, il eſt néceſſaire que le nombre n ſurpaſſe l'unité. On peut faire $n = \frac{3}{2}$, ou $n = 2$, il ne s'agit que de ſavoir laquelle de ces deux valeurs on doit préférer : dans le premier cas, le terme

pv^n feroit proportionnel au cube de la vîteſſe, & dans le ſecond, à la quatrieme puiſſance. Le premier préſente une difficulté; c'eſt que, dans le cas où le corps auroit un mouvement rétrogradé, ou que ſa vîteſſe $\sqrt{v}$ fût négative, la réſiſtance feroit $= \frac{1}{2}v - pv\sqrt{v}$, quoiqu'elle dût, auſſi bien que pour une vîteſſe poſitive, être toujours $= \frac{1}{2}v + pv\sqrt{v}$. Cet inconvénient n'aura pas lieu en ſuppoſant $n = 2$, où la réſiſtance $= \frac{1}{2}v + pv^2$; car il eſt alors indifférent pour l'effet de la réſiſtance, que la vîteſſe du mobile ſoit poſitive ou négative. On évite auſſi par ce moyen l'abſurdité d'avoir une réſiſtance infinie pour une vîteſſe finie : & ce qui acheve de confirmer la juſteſſe de cette formule, c'eſt que, dans le cas d'un mouvement lent, elle donne une réſiſtance un peu plus grande que $\frac{1}{2}v$, effet qu'on attribue à la cohéſion des particules de l'air. La force de cette cohéſion n'eſt proportionnelle, ſelon Newton, ni aux vîteſſes, ni à leurs quarrés, mais elle eſt conſtante. Si l'on exprime donc cette force par δ, la réſiſtance totale doit, ſuivant la théorie ordinaire, être repréſentée par $\delta + \frac{1}{2}v$, où δ eſt une ſi petite quantité, qu'à moins que $\frac{1}{2}v$ n'ait une très-petite valeur, elle pourra être regardée comme nulle par rapport à $\frac{1}{2}v$: ſi, par exemple, δ n'eſt que la millieme partie d'un pied, elle pourra diſparoître, dès que v ſera de quelques pouces. La formule $\delta + \frac{1}{2}v$ n'exprimant pas encore la réſiſtance totale lorſque le mouvement eſt rapide, ou que la hauteur v eſt très-grande, il faudra dans ce cas ajouter un terme, qui, ſelon toutes les apparences, ne peut avoir que la forme pv^2 : & comme dans ces ſortes de mou-

vemens il n'y a aucun inconvénient à négliger la quantité δ, on aura $\frac{1}{2}v + pv^2$ pour l'expression de la résistance. Si l'on étoit assuré que, pour une vîtesse de 1700 pieds par seconde, ou lorsque $v = 46400$, la résistance fût trois fois plus grande que selon la théorie ordinaire, la valeur de p seroit déterminée ; car on auroit alors $\frac{1}{2} \times 46400 + p \times 46400^2 = \frac{3}{2} \times 46400$; par conséquent $p = \frac{1}{46400}$. Mais si c'est dans le cas d'une vîtesse de 1900 pieds que cette résistance devient triple, on aura $p = \frac{1}{58200}$, où il est à remarquer que 58200 pieds est précisément double de la hauteur h, qui nous a servi plus haut à exprimer la force élastique de l'air. Puisque p ne nous est pas encore connu, mettons à sa place $\frac{1}{2g}$, de maniere que la vraie force de la résistance soit exprimée par $\frac{1}{2}v + \frac{v^2}{2g}$, & nous déterminerons ensuite la valeur de g, par le moyen de l'expérience. Au reste, si pour $\frac{1}{2g}$ on met la fraction $\frac{1}{46400}$, on aura pour les petits degrés de vîtesse, à peu près la même résistance que suivant la regle de l'Auteur : car si nous représentons encore la force résistante par θ, on aura $\theta = \frac{1}{2} + \frac{v}{46400}$, ou si la vîtesse de la balle est de n pieds par seconde, $\theta = \frac{1}{2} + \frac{nn}{46400}$; si $n = 100$, on aura $\theta = 0{,}5034$, un peu moindre que par la regle de l'Auteur ; si $n = 800$, θ sera $= 0{,}7214$, à peu près comme on le trouve par cette regle : mais si $n > 800$, jusqu'à $n = 1700$, il en résultera pour θ des valeurs plus grandes que selon la regle, comme il paroît assez vraisemblable que cela doit être.

Digitized by Google

SECONDE REMARQUE.

Nous ſuppoſerons donc que la vraie réſiſtance qu'éprouve dans l'air une balle qui s'y meut avec une vîteſſe $\sqrt{v}$ eſt égale à un cylindre d'air de même diametre, & d'une hauteur $= \frac{1}{2} v + \frac{v^2}{2g}$, & nous déterminerons la valeur de g de maniere que le calcul s'accorde, autant qu'il ſera poſſible, avec les expériences de l'Auteur. Soit donc le diametre de la balle $= c$, & que cette balle ſe meuve ſuivant la droite AB (fig. 19), avec une vîteſſe initiale en A $= \sqrt{b}$; pour trouver ſa vîteſſe $\sqrt{v}$ à tout autre point M, on fera AM $= x$, & l'on ſuppoſera la balle d'une matiere n fois plus peſante que l'air, de ſorte que le poids de la balle ſoit égal à celui d'une colonne d'air de même diametre, & d'une hauteur $= \frac{2}{3} nc$: la peſanteur de la balle ſera à la réſiſtance en M, comme $\frac{2}{3} nc$ eſt à $\frac{1}{2} v + \frac{v^2}{2g}$, ou comme 1 eſt à $\frac{3v}{4nc} + \frac{3v^2}{4ncg}$. Mais, pendant que le mobile parcourt l'eſpace infiniment petit $Mm = dx$, on a $dv = \frac{-3dx}{4nc}\left(v + \frac{vv}{g}\right)$, ou $\frac{3dx}{4nc} = \frac{-gdv}{gv+vv} = \frac{-dv}{v} + \frac{dv}{g+v}$, dont l'intégrale eſt $\frac{3x}{4nc} = l\,\frac{b(g+v)}{v(g+b)}$; ou ſi e eſt le nombre dont le logarithme hyperbolique eſt 1, on aura $e^{3x:4nc} = \frac{b(g+v)}{v(g+b)}$; d'où l'on tire $e^{3x:4nc}\,bv + e^{3x:4nc}\,gv = bg + bv$, & $g = \frac{(e^{3x:4nc} - 1)\,bv}{b - e^{3x:4nc}\,v}$,

où l'on obſervera que quand $\frac{3x}{4nc}$ eſt une très petite fraction, on a, à peu de choſe près, $e^{3x:4nc} = 1 + \frac{3x}{4nc} + \frac{9xx}{32n^2c^2} + \&c.$ Dans les épreuves de l'Auteur, la balle étoit de plomb, ainſi $n = 9647$; & le diametre $c = \frac{3}{4}$ de pouce. De plus, la viteſſe initiale de la balle étoit de 1670 pieds anglois par ſeconde, donc $b =$ 41990 pieds de Rhin, ou 42190 pieds anglois. Examinons le ſecond exemple de l'Auteur, dans lequel la balle avoit encore une vîteſſe de 1425 pieds, après avoir parcouru un eſpace de 100 pieds; d'où réſulte cette proportion $\sqrt{b} : \sqrt{v} :: 1670 : 1425$, &, à peu près, $b : v :: 103 : 75$; on a auſſi $x = 100$, donc $\frac{3x}{4nc} = 0,12436$, & $e^{3x:4nc} = 1,13242$, ce qui donne $g = \frac{0,13242 \times 75}{103 - 75 \times 1,13242} b = \frac{9,93150}{18,86738} b$: or $b = 41990$ pieds de Rhin; donc $g = 22102$ des mêmes pieds.

Le troiſieme exemple donne $\sqrt{b} = 1690$; $x = 150$, & $\sqrt{v} = 1300$ pieds, donc $\frac{3x}{4nc} = 0,18654$, & $e^{3x:4nc} = 1,20507$, ce qui donne $g = \frac{0,20507v}{b - 1,20507v} b$; or $\sqrt{b} : \sqrt{v} :: 13 : 10$, & $b : v :: 169 : 100$; donc $g = \frac{20,507}{48,493} b$, mais $b = 42981$ pieds de Rhin, donc $g = 18176$ pieds de Rhin.

Tirons encore la valeur de g de la quatrieme expérience, où l'on a toujours $c = \frac{3}{4}$ de pouce, & $n = 9647$: la viteſſe initiale de la balle étoit $\sqrt{b} = 1180$ pieds, & après avoir parcouru

couru $x = 225$ pieds, sa vîtesse étoit $\sqrt{v} = 950$ pieds; d'où l'on tire $\frac{3x}{4nc} = 0{,}27986$; $e^{3x:4nc} = 1{,}32294$; donc $g = \frac{0{,}32294v}{b - 1{,}32294v}\, b$; mais $b : v :: 13924 : 9025$, on a donc $g = \frac{2914{,}5335}{1984{,}4665}\, b$. Or $b = 20958$ pieds de Rhin, donc $g = 30781$ pieds de Rhin.

Ces trois expériences donnent donc trois différentes valeurs de g, savoir :

$$\left.\begin{array}{l} \text{La } 1^{re}\ldots\ g = 22102 \\ \text{La } 2^{de}\ldots\ g = 18176 \\ \text{La } 3^{me}\ldots\ g = 30781 \end{array}\right\} \text{pieds de Rhin. (24).}$$

Prenant la valeur moyenne, on trouvera $g = 23686$. Mais comme dans la troisieme expérience la balle a parcouru un plus grand espace que dans les deux autres, & qu'il y a aussi une plus grande différence entre les vîtesses en A & en M, il est à présumer que l'erreur qu'on a pu

---

(24) On peut trouver des valeurs plus exactes de $e^{3x:4nc}$ & de g, en employant les logarithmes, & sans le secours des approximations. Pour cela, on observera que $e = 2{,}718281828$ dont le logarithme ordinaire est $0{,}43429448$, qui a lui-même pour logarithme $9{,}6377843$, & que $le^{3x:4nc} = \frac{3x}{4nc}\, le$; dont le logarithme est $l\,\frac{3x}{4nc} \times 9{,}6377843$. De cette maniere on trouve :

$$\left.\begin{array}{l} \text{Pour la } 1^{re}\text{. exper.} \\ \text{la } 2^{de}\text{.} \\ \text{la } 3^{me}\text{.} \end{array}\right\} e^{\frac{3x}{4nc}} = \left\{\begin{array}{ll} 1{,}13246 \ \& & g = 23090 \\ 1{,}20513 & g = 18184 \\ 1{,}32297 & g = 30788 \end{array}\right.$$

commettre dans les procédés de cette troisieme expérience, est d'une moindre conséquence que dans les deux premieres. Il semble donc que c'est la derniere valeur de g qui doit être la plus exacte; malgré cela, on a lieu de croire qu'elle est trop grande : & comme la hauteur de la colonne d'air naturel qui exprime par son poids la force élastique de l'air, se trouve un peu moindre que cette derniere valeur de g, il est très-vraisemblable que la quantité g est exactement égale à cette hauteur. Mais nous avons supposé cette hauteur un peu trop grande, en admettant, comme nous avons fait, l'air 864 fois plus léger que l'eau. Supposons donc 30 pouces anglois, ou $2\frac{1}{2}$ pieds de hauteur à la colonne de mercure dont le poids exprime la force élastique de l'air; le mercure 13,575 fois plus pesant que l'eau, & 11538 fois plus pesant que l'air; la hauteur d'une colonne d'air, dont le poids est égal à la force élastique de l'air, sera de 28845 pieds anglois, ou de 27979 pieds de Rhin, & nous pourrons, sans craindre d'erreur sensible, prendre cette hauteur pour la valeur de g, laquelle ayant été jusqu'à présent représentée par h, on aura $g = h$; la résistance que rencontre une balle sera donc égale au poids d'une colonne d'air de même diametre, & d'une hauteur $= \frac{1}{2} v + \frac{1}{2h} vv$, en supposant $h =$ 28845 pieds d'Angleterre, ou $h = 27979$ pieds de Rhin. Ainsi la force résistante de l'air, qui est ici exprimée par $\frac{1}{2} + \frac{1}{2h} v$, est d'autant plus grande que le mobile a plus de vîtesse, & cela dans le même rapport, à peu près, que par la regle de l'Auteur. Suivant notre formule, il faut, pour que la résistance devienne triple de

celle que donne la théorie ordinaire, que le mobile ait une vîtesse de 1870 pieds de Rhin, ou de 1926 pieds anglois; tandis que, selon notre Auteur, cette augmentation dans la résistance doit déjà avoir lieu, lorsque la vitesse est de 1700 pieds par seconde. Cette différence paroîtra peu importante, si l'on considere combien il est difficile de se garantir de toute erreur dans les expériences. Quoi qu'il en soit, l'égalité des lettres *g* & *h* ne contribue pas peu à confirmer la justesse de notre formule, puisque le terme ajouté $\frac{vv}{2h}$ dépend du degré d'élasticité de l'air. En effet, cette augmentation de la résistance provenant en partie de la condensation de l'air qui précede le mobile, & en partie de la raréfaction de l'air qui le suit, il s'ensuit que cette augmentation ne peut avoir d'autre cause que l'élasticité de l'air. On voit aussi que la condensation de l'air devant le mobile, & sa raréfaction derriere, doivent être d'autant moins considérables, que l'élasticité est plus grande; parce qu'un air plus élastique a plus de force pour se mettre en équilibre avec celui qui l'environne. Il suit de là que plus l'air est élastique, moins sa résistance augmentera; & que cette augmentation sera nulle, si l'air est infiniment élastique. C'est aussi ce qu'indique la formule $\frac{1}{2}v + \frac{vv}{2h}$, dont le terme ajouté $\frac{vv}{2h}$ est d'autant moindre, que la hauteur *h* de la colonne d'air équivalente, par son poids, à la force de l'air, est plus grande; & si cette hauteur est infinie, le terme $\frac{vv}{2h}$ sera nul, comme cela doit être par la nature même de la chose. Il est vrai que ces propriétés auroient encore

lieu ſi, au lieu de h pour g on mettoit $2h$, ou $3h$, ou $\frac{1}{2}h$; mais il eſt aiſé de voir, par les calculs précédens, que, pour s'accorder avec l'expérience, on ne peut mettre pour g, ni $\frac{1}{2}h$, ni $2h$, encore moins $3h$; de ſorte que, par cette ſeule circonſtance que la ſimple hauteur h eſt préciſément la valeur qu'il convient le mieux de donner à g, notre formule reçoit ce degré de certitude qui caractériſe l'expreſſion d'une loi de la nature. Si la regle que nous venons de trouver pour déterminer la réſiſtance de l'air, s'accorde avec la vérité, quoiqu'elle n'ait été déduite que de l'expérience, il n'eſt pas douteux que la théorie ſeule ne puiſſe nous y conduire; & comme tout annonce l'exactitude de cette regle, il eſt à croire qu'en y donnant toute ſon attention, on pourra parvenir à un connoiſſance de la nature & de la vraie cauſe de la réſiſtance, plus étendue & plus parfaite que celle qu'on en a eue juſqu'à préſent (25).

(25) Comme il eſt très-eſſentiel dans l'Artillerie de pouvoir déterminer la viteſſe qu'un boulet de canon conſerve à chaque point de ſa courſe, afin de connoitre la force qu'il eſt capable d'exercer à différentes diſtances, nous croyons devoir entrer dans quelques détails ſur l'uſage de la formule $\frac{1}{2}v + \frac{v^2}{2h}$, que M. Euler propoſe dans la derniere remarque pour eſtimer la réſiſtance de l'air, & en faire l'application aux projectiles de l'Artillerie. Reprenons le calcul dès ſon origine, en conſervant les mêmes dénominations : la peſanteur du mobile ſphérique partant du point A (fig. 19.) avec une viteſſe $= \sqrt{b}$, étant à la réſiſtance que l'air lui oppoſe en M, comme $\frac{2}{3}nc$ eſt à $\frac{1}{2}v + \frac{v^2}{2h}$, ou comme $1 : \frac{3v}{4nc} + \frac{3v^2}{4nch}$; la force de la réſiſtance en M ſera exprimée par

$\frac{3v}{4nc} + \frac{3v^2}{4nch}$, celle de la gravité étant exprimée par 1; & comme cette force tend à retarder le mouvement de la sphere, on aura $dv = \frac{-3dx}{4nc}\left(v + \frac{v^2}{h}\right)$, ou $\frac{3dx}{4nc} = \frac{-hdv}{hv+vv} = \frac{-dv}{v} + \frac{dv}{h+v}$, dont l'intégrale est $\frac{3x}{4nc} = -lv + l(h+v) +$ une constante C, qu'on déterminera en observant qu'à l'origine A du mouvement, lorsque $x = 0$, on a $v = b$, ce qui donne $0 = -lb + l(h+b) + C$, donc $C = lb - l(h+b)$, & $\frac{3x}{4nc} = lb - lv + l(h+v) - l(h+b) = l\frac{b}{h+b} + l\frac{h+v}{v}$; d'où l'on tire, en réduisant les logarithmes hyperboliques à ceux des tables, $\frac{3x}{4nc} \times 0{,}43429448 - l\frac{b}{h+b} = l\frac{h+v}{v}$, & $v = \frac{h}{m-1}$; m étant un nombre dont le logarithme ordinaire est $\frac{3x}{4nc} \times 43429448 - l\frac{b}{h+b}$. Multipliant par 60,4, parce que nous rapporterons tout ici au pied de Roi, & extrayant la racine quarrée, on aura $\sqrt{\frac{60{,}4h}{m-1}}$ pour l'expression de la vîtesse qui reste au mobile, après avoir parcouru l'espace AM.

Pour appliquer cette formule aux projectiles de l'Artillerie, on cherchera d'abord la valeur de h, relativement à la hauteur moyenne du barometre, que nous supposons être de 27 po. 9 li., ou 2 pi. 3 po. 9 li.: on trouvera $h = 26683$, en supposant le mercure 13,575 fois plus dense que l'eau, & l'eau 850 fois plus dense que l'air. On fera ensuite usage de la Table suivante, qui indique les diametres de ces projectiles, & leurs pesanteurs spécifiques relativement à celle de l'air, toujours dans l'hypothese que l'eau est 850 fois plus pesante que l'air.

TABLE des diametres & des pesanteurs spécifiques des Boulets, Bombes & Obus.

NOMS des Projectiles.		Diametres, ou valeurs de c.	Pesanteur spécif. ou valeurs de n.
		pi.	
Boulets de	24	0,4537	6091
	16	0,3970	
	12	0,3605	
	8	0,3153	
	4	0,2500	
	pi		
Bombes de	12	0,98958 . .	. . 3590
	10	0,83333 . .	. . 4288
	8	0,66667 . .	. . 3522
Obus de . . .	6	0,5	. . 4453

Soit donc, pour exemple, un boulet de 24 lancé avec une vitesse initiale de 1600 pieds par seconde, & voyons quelle sera sa vitesse, après avoir parcouru 700 toises ou 4200 pieds.

Calcul de la vitesse restante.

$l\,\frac{3}{4nc}$ 6,4336039

$l\,(x = 4200)$ . . . 3,6232493

l 0,43429448 9,6377843

$l\,\frac{3x}{4nc} \times$ 0,43429448 9,6946375

dont le nombre est . 0,4950370

ôtez-en $l\,\frac{b}{b+h}$ . . . 9,7879325

reste lm 0,7071045

$b = 42384$

$h = 26683$

$b + h = 69067$

lb . . . 4,6272031

$l(b+h)$ 4,8392706

$l\,\frac{b}{b+h}$ 9,7879325

comp. $l\,(m-1)$ . . . 9,3877954
lh 4,4262404
l 60,4 1,7810369

$l\,\frac{60,4\,h}{m-1}$ . . . 5 5950727
dont la moitié . . 2,7975363 $= l.$ 627,39

Donc un boulet de 24, qui sort du canon avec une vîtesse de 1600 pieds par seconde, ne conserve plus, après avoir parcouru 700 toises, qu'une vitesse d'environ 627 pieds. Si l'on cherche la vitesse restante dans l'hypothese de la résistance proportionnelle aux quarrés des vitesses, ou exprimée par $\sqrt{v}$, on trouvera, par un calcul semblable à celui de le note qui suit la premiere remarque de la Proposition II. qu'au bout de 700 toises, le boulet de 24 chassé avec une vitesse initiale de 1600 pieds par seconde, auroit encore une vitesse de 905 pieds, & l'on verra, par la différence des résultats de ces deux théories, combien il importe de savoir quelle est la véritable, ou du moins celle qui approche le plus de la vérité. Quoique les expériences de M. Robins paroissent favorables à la formule $\frac{1}{2}v + \frac{vv}{2h}$, & que cette formule conduise à une expression de la vitesse restante, qui renferme toutes les circonstances qui peuvent faire varier la résistance, nous reviendrons néanmoins sur ce sujet, pour achever, autant qu'il est possible, de fixer notre jugement par de nouvelles observations.



PROPOSITION IV.

Maniere de connoître la vîtesse communiquée par les charges ordinaires, aux balles de mousquet & aux boulets de canon.

Il est démontré, par les calculs fondés sur la théorie de la Proposition VII. du premier Chapitre, & confirmé par l'expérience, qu'une balle de plomb ayant $\frac{3}{4}$ de pouce de diametre, pesant 1 $\frac{1}{5}$ once *avoir du poids*, la charge étant de la moitié de son poids, reçoit, dans un canon de 45 pouces de longueur, une vitesse capable de lui faire parcourir 1700 pieds par seconde d'un mouvement uniforme.

Si, au lieu d'une balle de plomb, on en mettoit une de fer dans le même canon, celle-ci, toutes choses égales d'ailleurs, recevroit une vîtesse plus grande que la balle de plomb, & cela, suivant le rapport des racines quarrées des pesanteurs spécifiques du plomb & du fer. Supposant donc ce rapport égal à celui de 3 à 2, on trouvera, par la théorie de la Proposition citée, qu'un boulet de fer de 24 livres, étant chargé avec 16 livres de poudre dans un canon dont l'ame a 10 pieds de longueur, recevra une vîtesse initiale de 1650 pieds par seconde.

Telle est, selon notre théorie, la vîtesse d'un boulet de 24, lorsqu'on tire à pleine charge. Mais si, au lieu des deux tiers du poids du boulet, on emploie une charge de poudre qui ne soit que la moitié de ce poids, ou de 12

livres; on ne trouvera, par cette théorie, que 1490 pieds par feconde pour la vîteffe du boulet. La même vîteffe aura lieu pour tous les boulets d'un moindre diametre, lorfque la charge fera proportionnelle à leur poids, & qu'il y aura même rapport entre la longueur des canons & le diametre des boulets. Quoique ce rapport ne foit pas toujours exactement obfervé dans les petites pieces, la différence n'eft point affez confidérable, pour que la vîteffe qu'on vient de déterminer s'écarte fenfiblement de la vérité, comme il eft aifé de s'en convaincre par le calcul.

Il eft bon de prévenir que, dans cette détermination, nous ne fuppofons au boulet qu'autant de vent qu'il en faut pour qu'il entre librement dans le canon : car il arrive fouvent que, foit par négligence, foit par ignorance, le calibre de la piece furpaffe tellement le diametre du boulet, qu'il s'échappe par les côtés une très-grande partie de la flamme ; & c'eft par cette raifon fans doute que la vîteffe du boulet eft fouvent beaucoup moindre qu'on ne le trouve par la théorie. Néanmoins, il eft à préfumer qu'une partie de la force qui fe perd par le vent du boulet, eft compenfée par la chaleur, dont l'intenfité, comme on l'a vu dans la Propofition VI, eft plus grande dans les grandes charges que dans les petites.

SCHOLIE.

En confidérant la prodigieufe vîteffe d'un boulet de canon, telle que nous venons de la déterminer, on eft en état de réfoudre une diffi-

culté, qui a fait tomber dans l'erreur la plupart des Auteurs qui ont traité de la théorie de l'Artillerie, en leur faisant imaginer la plus étrange des hypotheses. Cette difficulté concerne ce qu'on appelle la portée de but en blanc, ou cette portion du chemin d'un boulet que l'on prétendoit être en ligne droite. Anderson a trouvé par plusieurs expériences que, dans les premiers instans de leur mouvement, les boulets & les bombes ne s'écartoient point de la ligne droite, autant que cela devoit être par la doctrine de Galilée; & pour expliquer cette circonstance par sa théorie, il a imaginé que, depuis la bouche du canon jusqu'à une certaine distance, les projectiles parcouroient toujours une ligne droite, & que dans cet intervalle, ils n'étoient point soumis à l'action de la pesanteur. Il a cru, par ce moyen, pouvoir concilier le systême du mouvement parabolique avec l'opinion commune des Praticiens : mais quand même on n'auroit point de meilleure explication à donner, il n'étoit sans doute pas nécessaire d'employer un moyen aussi absurde que la cessation de l'action de la pesanteur. Anderson ne s'est trompé, que parce qu'il ignoroit combien la vîtesse des boulets les plus pesans est diminuée par la résistance de l'air; & l'erreur des anciens Praticiens, qui pensoient qu'une partie de la course des projectiles se faisoit en ligne droite, ne provenoit que de l'ignorance où ils étoient de la rapidité de leur mouvement : car dans cette étendue qu'ils nommoient portée de but en blanc, la courbure de la ligne, quoique très-réelle, est si peu sensible, qu'il leur étoit presqu'impossible de s'en appercevoir. Un boulet de 24 chassé par une charge de poudre

égale aux deux tiers de son poids, ne s'écarte de sa premiere direction, après avoir parcouru 1500 pieds, que d'un angle d'un peu plus qu'un demi-degré; or une aussi petite déviation s'apperçoit difficilement, sur-tout quand on n'a que des méthodes incertaines pour pointer les pieces. Il n'est donc pas étonnant que la plupart des Artilleurs aient regardé cette partie du chemin des projectiles comme une ligne droite, si l'on fait attention sur-tout qu'il se présente souvent d'autres causes d'erreur plus considérable, que celle qui provient de la courbure de cette ligne, occasionnée par l'action de la pesanteur.

Après avoir déterminé, dans cette Proposition, la vîtesse d'un boulet chargé aux deux tiers & à la moitié de son poids, je crois que c'est ici le lieu d'employer notre théorie à faire voir qu'en augmentant la charge de poudre, la vîtesse du boulet n'augmente que jusqu'à un certain point, passé lequel, quelle que soit la grandeur de la charge, la vîtesse du boulet ne fera que diminuer. On peut déterminer de la maniere suivante la charge de poudre qui, dans chaque piece, imprime la plus grande vîtesse au boulet, ainsi que le rapport de cette plus grande vîtesse à celle qui résulteroit de toute autre charge plus ou moins grande.

Soit AB (fig. 22.) l'axe de la piece, & AC perpendiculaire sur AB; entre les lignes AB & AC prises pour asymptotes, soit décrite l'hyperbole LEF terminée par la droite BF parallele à AC. On cherchera le point D, tel que le rectangle ADEG soit égal à l'espace asymptotique DEFB; AD sera la longueur de la charge qui donne la plus grande vîtesse au boulet. Et

comme, par la doctrine des logarithmes, le rapport de AD à AB est le même que celui de 1 à 2,7182818, il s'ensuit qu'en connoissant AD & le calibre de la piece, on pourra facilement déterminer la charge du plus grand effet.

Si, au lieu de cette charge, on en met une autre qui occupe la longueur AI dans l'ame de la piece, on menera IH parallele à AC, & l'on décrira par le point H l'hyperbole HK. Cela étant fait, la plus grande vitesse sera à celle que communique la charge dont la longueur est AI, comme la racine quarrée du quadrilatere AE est à la racine quarrée de ce même quadrilatere, diminué du triligne HEK. C'est une suite de ce que nous avons dit dans la Proposition VII. du premier Chapitre.

PREMIERE REMARQUE.

L'Auteur n'a considéré dans le premier Chapitre que les balles de mousquet; il a calculé leurs vîtesses, & confirmé les résultats du calcul par des expériences faites avec le pendule; il examine ici ce qui concerne les boulets de canon: & comme la vîtesse de ces projectiles ne peut pas être déterminée par le moyen de cette machine, il se contente de la déduire de sa théorie, le peu de différence qu'il a trouvé entre les résultats de l'expérience & ceux de la théorie appliquée aux balles de mousquet, lui ayant fait présumer que le même accord auroit lieu à l'égard des boulets de canon: & quoique le vent du boulet soit à proportion plus considérable dans les canons que dans les fusils, qu'il

s'y perd par conséquent une plus grande partie de la force de la poudre ; d'un autre côté, la chaleur qui accompagne l'inflammation d'une grosse quantité de poudre étant plus vive, cette plus grande intensité de chaleur doit augmenter la force de la poudre, & compenser la perte qui s'en fait par le vent du boulet. Nous avons déjà remarqué plus haut qu'il y a plusieurs circonstances auxquelles l'Auteur n'a point eu égard dans le calcul de la vîtesse des balles ; comme il est cependant essentiel de les considérer, pour avoir une connoissance exacte de la nature & des effets de la poudre, nous choisirons, pour exprimer la vîtesse des boulets, une formule qui renferme les principales circonstances, & qui donne des résultats conformes aux expériences faites sur des balles de fusils : car quand même on en négligeroit quelques-unes, il est à présumer qu'une regle qui s'accorde avec l'expérience lorsqu'il s'agit des balles de fusil, ne s'en écartera pas beaucoup, si on l'applique à des boulets de canon ; d'ailleurs, dans des recherches de cette nature, on ne peut pas se flatter de parvenir à une plus grande précision.

Nous nous servirons donc ici de la formule que nous avons trouvée dans la remarque qui suit la derniere Proposition du Chapitre précédent, d'autant mieux qu'elle exige peu de calculs, & qu'elle donne, à peu près, les mêmes vîtesses que l'expérience. Cette formule renferme deux grandeurs, m & n, qui dépendent de la qualité de la poudre, & auxquelles nous assignerons les valeurs que donne la poudre de guerre dont l'Auteur s'est servi ; c'est-à-dire, que nous supposerons $m = 244$, & $n = 850$,

Cela posé, soit la longueur de l'ame $= a$; la longueur de l'espace qui est derriere le boulet & que la poudre occupe $= b$; k la hauteur d'une colonne d'air égale au poids du boulet, & h la hauteur d'une colonne d'air égale, par son poids, à la force élastique de l'air; ou $h = 27980$ pieds de Rhin, comme nous l'avons trouvé. Enfin, soit v la hauteur à laquelle est due la vîtesse du boulet; nous avons vu que $v = \frac{244\beta b h}{k + 425 b}$ $l\ \frac{800 a - 396 b}{404 b}$; mais suivant l'Auteur on a $244\beta = 1000$, & si dans la fraction $\frac{800 a - 396 b}{404 b}$, on met 400 au lieu de 396 & de 404, ce qui ne produit qu'un très-petit changement dans sa valeur, on aura $v = \frac{1000 b h}{k + 425 b}\ l\ \frac{2a - b}{b}$.

Si l'on fait $a = 45$ pouces; $b = 2\frac{5}{8}$, & $k = 4900$ pouces, la vîtesse sera de 1684 pieds anglois, ce qui approche beaucoup du résultat de l'expérience. Soit maintenant c le diametre du boulet, & sa matiere n fois plus pesante que l'air, on aura $k = \frac{2}{3} nc$; & comme la pesanteur de la poudre est $= 850 b$, le poids du boulet sera au poids de la charge, comme k est à $850 b$. Soit donc le poids du boulet $= P$, celui de la charge de poudre $= Q$, on aura $\frac{k}{850 b} = \frac{P}{Q}$, ce qui donne, en employant le rapport toujours connu de la charge au poids du boulet, $v = \frac{1000 Q h}{425 (2P + Q)}\ l\ \frac{2a - b}{b}$; & mettant pour h, sa valeur 27980 pieds de Rhin, on aura $v = \frac{65700 Q}{2P + Q}\ l\ \frac{2a - b}{b}$ pieds de

Rhin (26). De plus, puisque $k = \frac{2}{3} nc$, on aura $P : Q :: \frac{2}{3} nc : 850 b :: nc : 1275 b$, donc $b = \frac{nQc}{1275 P}$, ce qui donne une expreſſion de b en c, diametre du boulet. L'uſage ordinaire eſt auſſi de déſigner la longueur de l'ame par le nombre des diametres du boulet qu'elle contient ; faiſant donc $a = ic$, on aura $a : b :: i : \frac{nQ}{1275 P} :: 1275\, iP : nQ$, ce qui donne $v = \frac{65700 Q}{2P+Q}\, l\, \frac{2550\, iP - nQ}{nQ}$ pieds de Rhin. Si le boulet eſt de fer, comme c'eſt l'uſage, on aura $n = 6647$, ou 6650 ; donc, pour les boulets de fer, on a $v = \frac{65700 Q}{2P+Q}\, l\, \frac{51\, iP - 133 Q}{133 Q}$ pieds de Rhin. Ainſi lorſque la charge de poudre eſt la moitié du poids du boulet, on aura $v = 13140\, l\, \frac{102 i - 133}{133}$ pieds de Rhin ; ſi la charge eſt les $\frac{2}{3}$ du poids du boulet, on aura $v = 16425\, l\, \frac{153 i - 266}{266}$ pieds de Rhin. Ce ſont-là les deux cas que l'Auteur a conſidérés dans cette Propoſition : nous ajouterons que lorſque la charge eſt les $\frac{3}{4}$ du poids du boulet, on a $v = 17918\, l\, \frac{204 i - 399}{399}$ pieds de Rhin, & enfin lorſque $Q = P$, $v = 21900\, l\, \frac{51 i - 133}{133}$.

L'Auteur n'a conſidéré que la piece de 24 ;

---

(26) Je trouve 65835 au lieu de 65700, ce qui fait un changement dans les réſultats des calculs ſuivans, mais de peu de conſéquence.

nous étendrons l'usage de notre formule à tous les autres calibres, en cherchant la vîtesse de leurs boulets, relativement aux différentes charges dont nous venons de parler, comme on peut le voir dans la Table suivante, composée de six colonnes. La premiere indique les pieces par le poids du boulet; la seconde la longueur en diametres du boulet; les quatre autres renferment les vîtesses relatives aux quatre charges pour lesquelles nous venons de trouver les valeurs de *v*. Ces vîtesses sont exprimées en pieds de Rhin.

		i	$\frac{1}{2}$P	$\frac{2}{3}$P	$\frac{3}{4}$P	P
Piece de	48	18	1447	1515	1535	1559
	36	20	1479	1554	1577	1612
	24	24	1532	1618	1647	1697
	12	26	1554	1645	1676	1733
	6	27	1565	1657	1690	1749
	bataille.	18	1447	1515	1535	1559
Couleuvrines de	18	30	1593	1692	1727	1794
	9	32	1610	1712	1749	1821
	6	34	1626	1731	1769	1845
Fauconneau.		36	1642	1749	1788	1868
Demi-Faucon.		38	1656	1766	1806	1889
Serpentinelle.		40	1669	1781	1823	1909

On voit par cette Table que, le rapport de la charge au poids du boulet étant le même, la vîtesse

vîteſſe du boulet eſt d'autant plus grande, que l'ame de la piece contient le diametre du boulet un plus grand nombre de fois : ainſi une piece de 48 chaſſe ſon boulet avec moins de vîteſſe que la piece de 24, ce qui pourra bien paroître incroyable & abſurde au commun des Artilleurs, qui n'ont aucune connoiſſance de la réſiſtance de l'air; car étant prouvé par l'expérience que, ſous la même direction, la piece de 48 porte plus loin que celle de 24, il eſt tout naturel de penſer que le boulet eſt parti de la premiere avec plus de vîteſſe que de la ſeconde. Cette conſéquence ſeroit juſte, ſi l'air n'oppoſoit point de réſiſtance, ou ſi cette réſiſtance étoit aſſez peu conſidérable, pour qu'on pût n'y avoir aucun égard ; car alors la portée dépendroit néceſſairement de la vîteſſe, & ſeroit d'autant plus grande, que le boulet ſeroit chaſſé avec plus de vîteſſe. Mais il n'en eſt point ainſi : la réſiſtance de l'air eſt très-conſidérable, comme nous l'avons vu, & comme elle dépend particuliérement de la groſſeur du boulet, il peut ſe faire qu'un gros boulet aille plus loin qu'un moindre, quoique la vîteſſe initiale de celui-ci ait été plus grande. Afin de rendre ceci plus ſenſible, il eſt à remarquer que, pour juger de l'effet de la réſiſtance, ce n'eſt point tant ſa force abſolue qu'il faut conſidérer, que ſon rapport au poids du boulet. Si l'on ſe repréſente donc deux boulets, dont l'un ait un diametre double de l'autre, le premier peſera huit fois autant que le ſecond, & quoique la réſiſtance du premier ſoit quadruple de celle du ſecond, leur vîteſſe étant la même, puiſque la réſiſtance

ſuit le rapport des ſurfaces ou des quarrés des diametres, toutes choſes égales d'ailleurs; néanmoins l'effet de la réſiſtance ſur le premier ne ſera point à l'effet de la réſiſtance ſur le ſecond, comme 4 à 1, mais comme $\frac{4}{8}$: $\frac{1}{1}$; c'eſt-à-dire, que le gros boulet ne rencontrera qu'une réſiſtance moitié de celle que l'air oppoſe au ſecond. Il ſuit donc que ſi ces deux boulets partent avec la même vîteſſe & ſous la même direction, le premier ira plus loin que le ſecond; & que s'ils vont également loin, le plus gros aura néceſſairement reçu une moindre vîteſſe. Cette différence eſt ſi grande, comme on le verra encore mieux par la ſuite, qu'il eſt aiſé de comprendre comment un gros boulet va plus loin, ſous la même direction, qu'un moindre, quoique la vîteſſe de celui-ci ait d'abord été plus grande.

L'Auteur ne conſidere que le boulet de 24, & lui trouve une vîteſſe de 1650 pieds par ſeconde, la charge étant de 16 livres, ce qui s'accorde aſſez bien avec le réſultat de notre calcul; car on voit par nos Tables que, dans ce cas, le boulet a une vîteſſe de 1618 pieds de Rhin ou de 1668 pieds anglois. Mais pour la charge de 12 livres, l'Auteur ne trouve qu'une vîteſſe de 1490 pieds anglois, tandis que, pour le même cas, nous en trouvons une de 1532 pieds de Rhin ou de 1578 pieds anglois. Mais il eſt à remarquer que l'Auteur, dans la regle qu'il a donnée, n'a aucun égard à pluſieurs circonſtances qui accompagnent l'inflammation de la poudre : cette regle eſt énoncée dans la formule ſuivante : $v = \frac{1000\,b\,h}{k}\ l\ \frac{a}{b}$, ou, en y

faisant entrer le poids de la charge & du boulet, $v = $ (27) $\frac{32850\,Q}{P}$ $l\ \frac{1275\,i\,P}{n\,Q}$ pieds de Rhin. Dans cette équation, les quantités P, Q, n, i ont les mêmes valeurs que nous avons employées dans notre formule. Ainsi pour un boulet de fer on aura, par la regle de l'Auteur, $v = \frac{32850}{P}$ $l\ \frac{51\,i\,P}{266\,Q}$; & si la charge est la moitié du poids du boulet, $v = 16425\ l\ \frac{51\,i}{133}$. Enfin lorsque $i = 24$, valeur de i pour la piece de 24, la vitesse du boulet sera de 1509 pieds de Rhin, ou de 1556 pieds anglois par seconde, ce qui s'écarte beaucoup du calcul de l'Auteur. S'il ne s'est point glissé de faute d'impression dans ce calcul, la différence, à moins qu'on ne l'attribue aux valeurs de h & de k, que l'Auteur a déterminées autrement que nous, ne peut venir que de ce que nous avons supposé ici que le diametre du boulet est parfaitement égal au calibre de la piece, quoiqu'il soit un peu moindre. Mais comme d'autres circonstances empêchent qu'on ne puisse rien déterminer de certain dans cette matiere, nous avons cru pouvoir faire abstraction de celle-ci, pour éviter les calculs compliqués auxquels elle donneroit lieu.

La principale cause de la différence qui se trouve entre la formule de l'Auteur & la nôtre, consiste en ce qu'il n'a pas fait attention que les

(27) Je trouve 32917 au lieu de 32850.

matieres grossieres de la poudre participent aussi au mouvement, & qu'elles occupent une partie de l'espace dans lequel la charge est renfermée. La premiere de ces deux circonstances diminue la vitesse du boulet, parce qu'une partie de la force de la poudre est employée à mettre ces matieres grossieres en mouvement. La seconde au contraire contribue à augmenter la vitesse du boulet, parce qu'elle fait que le fluide élastique est comprimé dans un moindre espace. Lorsque ces deux effets sont égaux, la regle de l'Auteur s'accorde avec la nôtre, comme il arrive lorsqu'on tire un boulet de 24 avec 16 livres de poudre; & il ne faut pas s'étonner que, pour les autres cas, il y ait une différence si sensible entre nos résultats.

Au reste, il y a lieu de croire que les nombres de la Table ci-dessus sont trop grands, attendu que le calcul est fondé sur l'hypothese de l'inflammation instantanée, & abstraction faite du vent du boulet. Cependant, comme il regne un rapport assez exact entre ces nombres, si l'on savoit de combien l'un d'eux est trop grand, il seroit facile de rectifier tous les autres. Si, par exemple, un boulet de 24 tiré avec 16 livres de poudre, avoit réellement une vitesse de 1650 pieds anglois, ou de 1601 pieds de Rhin, les nombres de notre Table seroient tous d'environ 20 pieds trop grands; différence trop petite pour ne pas échapper à l'observation.

Seconde Remarque.

Nous avons ſuppoſé dans nos calculs que la poudre eſt auſſi peſante que l'eau, & par conſéquent 850 fois plus peſante que l'air, ce qui ne s'écarte pas ſenſiblement de la vérité : car, quoique les grains de poudre tombent au fond de l'eau, l'air compris dans les intervalles qu'ils laiſſent entre eux en diminue la peſanteur ſpécifique, & fait qu'un pied cube de poudre peſe à peu près autant qu'un pareil volume d'eau. Si, en employant la formule $v = \frac{1000\,bh}{k}\ l\ \frac{a}{b}$ que l'Auteur donne pour trouver la vîteſſe du boulet, nous voulons aſſigner à la poudre une peſanteur telle que, pour un boulet de 24 chargé aux deux tiers de ſon poids, il réſulte une vîteſſe de 1650 pieds anglois par ſeconde, il faudroit ſuppoſer la poudre 910 fois plus peſante que l'air, abſtraction faite du vent du boulet, qu'on peut évaluer à la quinzieme partie de l'ouverture de la bouche du canon. Suppoſons donc que la poudre ſoit m fois plus peſante que l'air, le poids Q de la charge ſera égal au poids d'un cylindre d'air de même diametre que le boulet, & d'une hauteur $= \frac{16}{15}\,mb$, & l'on aura $P : Q :: \frac{2}{3}\,nc : \frac{16}{15}\,mb$, ou $:: k : \frac{16}{15}\,mb$; il faut donc, ſelon le calcul de l'Auteur, faire $\frac{16}{15}\,m = 910$, d'où l'on tire $m = 853$, à peu près comme nous l'avons ſuppoſé. Mais ſi nous faiſons entrer le vent du boulet dans notre calcul, il faudra prendre 910 au lieu de 850 dans le rapport de P à Q, ce qui donne P : Q ::

$m : 1365\, b$, &, à cauſe de $a = ic$, on aura $a : b :: 1365\, iP : nQ$, & $k : b :: 910\, P : Q$; d'où l'on tire $v = \frac{1000\, Qh}{455(2P+Q)}\ l\ \frac{2730\, iP - nQ}{nQ}$, ou $v = \frac{61494\, Q}{2P+Q}\ l\ \frac{65\, iP - 158\, Q}{158\, Q}$ pieds de Rhin pour un boulet de fer. Donc, en prenant les rapports qu'on a ſuppoſés ci-deſſus entre P & Q, on aura :

lorſque $Q = \frac{1}{2} P$; $v = 12298{,}8\ l\ \frac{65i - 79}{79}$

$Q = \frac{2}{3} P$; $v = 15373{,}5\ l\ \frac{195i - 316}{316}$

$Q = \frac{3}{4} P$; $v = 16771{,}1\ l\ \frac{130i - 237}{237}$

$Q = P$; $v = 20498{,}0\ l\ \frac{65i - 158}{158}$

au moyen de quoi il eſt facile de rectifier la Table précédente, ou d'en calculer une nouvelle.

Cette équation, qui doit être plus exacte que la premiere, nous a ſervi à calculer une Table des vîteſſes relativement aux différens rapports entre la charge & le boulet, & aux différentes longueurs de l'ame du canon ; & afin de rendre cette Table plus utile, nous l'avons étendue à un plus grand nombre de charges. Nous avons ſuppoſé, à cet effet, le poids du boulet partagé en ſix parties égales, & nous avons conſidéré la charge ſucceſſivement égale au $\frac{1}{6}$, aux $\frac{2}{6}$, aux $\frac{3}{6}$, aux $\frac{4}{6}$, aux $\frac{5}{6}$ & aux $\frac{6}{6}$ du poids du boulet. Suppoſant enſuite que la longueur de l'ame ſoit au diametre du boulet, comme i eſt à 1, & que v ſoit la hauteur d'où un corps de-

vroit tomber dans le vuide pour acquérir la vîtesse initiale du boulet, on trouvera les valeurs suivantes de v relatives à ces six sortes de charges, P étant, comme ci-devant, le poids du boulet, & Q le poids de la charge.

Lorsque	on aura
$Q = \frac{1}{6} P$	$v = 4730{,}31\ l\ \frac{780i-316}{316}$
$Q = \frac{2}{6} P$	$v = 8784{,}85\ l\ \frac{390i-316}{316}$
$Q = \frac{3}{6} P$	$v = 12298{,}80\ l\ \frac{260i-316}{316}$
$Q = \frac{4}{6} P$	$v = 15373{,}50\ l\ \frac{195i-316}{316}$
$Q = \frac{5}{6} P$	$v = 18086{,}47\ l\ \frac{156i-316}{316}$
$Q = \frac{6}{6} = P$	$v = 20498{,}00\ l\ \frac{130i-316}{316}$

Comme la vîtesse du boulet dépend moins de son poids dont la piece tire sa dénomination, que de la valeur de la lettre i, nous supposerons différentes valeurs à cette lettre i, en commençant par 10 & continuant de 2 en 2 jusqu'à 40. Il ne sera pas difficile après cela de trouver la vîtesse, lorsque la valeur de i sera un nombre impair entre 10 & 40. Cette Table contient les vîtesses par seconde & en pieds de Rhin.

VALEURS DE Q

Valeurs de i	$\frac{1}{6}P$	$\frac{2}{6}P$	$\frac{3}{6}P$	$\frac{4}{6}P$	$\frac{5}{6}P$	$\frac{6}{6}P$
10	967	1155	1233	1256	1245	1206
12	996	1201	1295	1336	1342	1325
14	1019	1238	1345	1398	1417	1414
16	1039	1269	1386	1448	1478	1484
18	1056	1295	1420	1491	1528	1543
20	1071	1318	1450	1527	1571	1592
22	1084	1338	1477	1559	1608	1635
24	1096	1357	1501	1588	1642	1672
26	1107	1374	1522	1614	1671	1706
28	1117	1389	1542	1637	1698	1736
30	1126	1403	1560	1658	1723	1764
32	1135	1416	1576	1678	1745	1789
34	1143	1428	1591	1696	1766	1813
36	1150	1439	1605	1713	1785	1834
38	1157	1449	1619	1729	1803	1854
40	1164	1459	1631	1744	1820	1873

Cette Table peut être utile, à bien des égards, dans la pratique de l'Artillerie, & on peut en tirer des conséquences fort intéressantes. On voit d'abord que lorsque la charge est donnée relativement au poids du boulet, la vitesse est d'autant plus grande que la piece est plus longue;

il eſt vrai que cela paroît contraire à l'expérience, & à l'opinion communément reçue, que la vîteſſe du boulet doit enfin diminuer lorſqu'il ſe meut dans un canon d'une trop grande longueur; & ſur ce fondement, on a prétendu déterminer la longueur la plus avantageuſe des pieces. Mais quoique le boulet, pendant qu'il avance dans le canon, ait quelque réſiſtance à éprouver de la part de l'air; néanmoins cette réſiſtance non-ſeulement n'eſt pas plus grande que dans l'air libre, elle eſt au contraire moindre, lorſque le boulet a une très-grande vîteſſe, parce que pendant que le boulet parcourt l'intérieur du canon, il ne ſe fait point de vuide derriere lui comme en plein air. De plus, la poudre agit continuellement ſur le boulet pendant qu'il eſt dans le canon, ce qui augmente néceſſairement la vîteſſe qui lui a déjà été communiquée au premier inſtant de l'inflammation. A l'égard du frottement, on peut ſe rappeller qu'il eſt ſi peu conſidérable en comparaiſon de la force de la poudre, qu'il eſt inutile d'y faire attention. Puis donc que le mouvement du boulet, tant qu'il parcourt l'ame de la piece, n'éprouve pas de la part de l'air une plus grande diminution dans ſon mouvement que lorſqu'il en eſt ſorti, & que d'ailleurs le boulet y reçoit continuellement de nouvelles impulſions, on ne conçoit pas comment une trop grande longueur de l'ame pourroit diminuer la vîteſſe du boulet.

Néanmoins il pourroit arriver, lorſqu'une piece n'eſt pas forée bien droit, que le mouvement du boulet y fût tellement ralenti, que ſi l'on raccourciſſoit la piece en retranchant la partie mal foreé, le boulet ſortiroit alors avec une plus grande

viteſſe; & cette circonſtance s'eſt probablement rencontrée dans les épreuves qui ont donné lieu à cette opinion, car on ſe fonde ſur ce qu'un tronçon d'environ deux pieds & demi de longueur ayant été détaché d'une très-longue piece de canon, le boulet a été chaſſé, après cet accident, avec plus de viteſſe qu'auparavant. La nature même de cet accident prouve aſſez que l'ame de cette piece étoit un peu courbée, & que ce tronçon en a été détaché moins par la force de la poudre que par les battemens du boulet. On fonde encore cette opinion ſur la différence des portées des anciennes pieces & des nouvelles: celles-ci, dit-on, ſont moins longues, & portent cependant plus loin que les autres; mais les expériences qu'on cite en preuve ne ſont rien moins que concluantes: on a obſervé que les anciennes pieces de 96, quoique plus longues que les pieces modernes de 48, portent moins loin que celles-ci. Or, quand même, dans ces deux cas, les charges de poudre ſeroient proportionnelles au poids des boulets, toujours eſt-il vrai que la viteſſe du boulet dépend moins de la longueur abſolue de l'ame, que du rapport de ſa longueur à ſon calibre; & il eſt très-poſſible que la piece ancienne de 96, quoique réellement plus longue que la moderne de 48, contienne moins de ſes calibres dans ſa longueur que celle-ci: pour qu'une piece de 96 chaſſe ſon boulet avec la même viteſſe qu'une piece de 48, il faut que la premiere ſoit d'un quart plus longue que la ſeconde.

La meilleure raiſon qu'on ait eue pour abandonner l'uſage des anciennes pieces longues, peſantes & d'un gros calibre, eſt la difficulté de

les mener en campagne & de les servir, inconvénient que ne compensoit point la pesanteur des boulets, & leur plus grande vîtesse ; car il ne faut pas s'attendre, quand il s'agit de battre en breche, qu'un boulet d'une pesanteur double produise un effet double : le trou qu'il fait dans le revêtement qu'on veut détruire n'est pas double ; deux boulets, qui n'auroient que la moitié de son poids, produiroient un effet plus considérable, & ne coûteroient pas plus ensemble qu'un coup tiré d'un calibre double. C'est par cette raison qu'on ne se sert plus des pieces de 48 pour battre en breche ; on réussit également avec des pieces de 24, avec moins de peine & à moins de frais. En revanche les pieces de 48 sont préférables à celles de 24 pour le service de la marine : les ouvertures que font leurs boulets dans les œuvres vives d'un vaisseau, non-seulement sont plus difficiles à boucher ; mais il s'y forme encore des éclats qui mettent les assistans, même assez éloignés, en danger d'être tués ou estropiés.

Au reste il n'est pas toujours nécessaire que le boulet ait une si grande vîtesse ; s'il a assez de force pour s'enfoncer dans le revêtement d'un rempart, ou pour percer un vaisseau, une vîtesse plus grande seroit inutile, & même désavantageuse dans certains cas. Or, pour qu'un boulet de 24 tiré d'une piece du même calibre avec 12 livres de poudre produise tout l'effet qu'on en attend, il faut que sa vîtesse initiale soit d'environ 1500 pieds par seconde. Si l'on se propose donc de déterminer la longueur des pieces de batteries, de maniere que le boulet de 24 reçoive une vîtesse de 1500 pieds par seconde, & qu'à cet effet

on veuille employer la charge de 12 livres, il faudra que la longueur de l'ame soit de 24 calibres, cette longueur est en effet celle que l'on donne aux pieces de 24. Veut-on obtenir le même effet avec moins de poudre? Il faudra que la piece soit plus longue : pour une charge de 8 livres, par exemple, le même effet n'auroit lieu qu'avec une longueur de plus de 40 calibres. Mais en employant des charges plus fortes, on pourra gagner quelque chose sur la longueur des pieces : il suffit, par exemple, que l'ame ait 19 calibres de longueur, si l'on veut tirer avec 16 livres de poudre, & si l'on poussoit la charge jusqu'à 20 ou 24 livres, la longueur ne se réduiroit qu'à 17 calibres. S'il étoit donc possible de comparer la dépense de la poudre avec les inconvéniens attachés à la longueur, & conséquemment à la pesanteur des pieces de canon, il seroit facile d'en conclure la longueur la plus convenable : on voit sans peine qu'il est plus avantageux de tirer avec 12 livres de poudre & donner 24 calibres à la longueur de la piece, que de lui en donner plus de 40, pour épargner 4 livres de poudre. A l'égard de la charge de 16 livres, il paroît qu'en retranchant 5 calibres de la longueur de la piece, on ne seroit point dédommagé de ce qu'il en coûteroit de plus, si l'on employoit cette charge. Il est donc à présumer qu'en fixant la charge à 12 livres de poudre, & la longueur à 24 calibres, on remplit le double objet de modérer la dépense & de faciliter, autant qu'il est possible, la manœuvre des pieces de ce calibre.

D'un autre côté, comme un boulet, à mesure qu'il est plus gros, perd moins de son mouve-

ment par la résistance de l'air, on pourra aussi lui imprimer d'autant moins de vîtesse initiale: ainsi, un boulet de 48 pourra s'enfoncer autant qu'un boulet de 24, dans les terres d'un rempart, quand même la vîtesse initiale du premier seroit moindre que celle du second. Si l'on emploie, à cet effet, des pieces de 48, il suffira que le boulet ait une vîtesse de 1420 pieds par seconde; pour donner cette vîtesse avec une charge de 16 livres de poudre, il faudroit que la longueur de l'ame fût de 34 calibres, ce qui rendroit cette arme absolument impraticable: si l'on se sert d'une charge de 24 livres, une longueur de 18 calibre suffira, & c'est à cette longueur qu'il paroît qu'on doit s'arrêter; car en poussant la charge jusqu'à 32 livres de poudre, on ne gagneroit que deux calibres sur la longueur du canon.

Mais si l'on vouloit qu'un petit boulet fît le même effet qu'un boulet de 24, dont la vîtesse seroit de 1500 pieds par seconde, il faudroit que ce petit boulet fût chassé avec une vîtesse plus grande, parce que la résistance de l'air lui fait perdre une plus grande partie de son mouvement. Tout consiste donc à savoir à quel usage on veut employer chaque coup de canon: de là dépend la connoissance de la vîtesse que le boulet doit avoir, de la longueur qu'il convient le mieux de donner à la piece, & de la charge la plus avantageuse. Qu'il s'agisse, par exemple, d'imprimer à un boulet de 18 livres une vîtesse de 1650 pieds par seconde; on verra, en consultant la Table, que les charges de 3, 6 & 9 livres sont toutes trop foibles, puisque la derniere même exigeroit une longueur de

plus de 40 calibres. Mais avec la charge de 12 livres, il ne faudroit que 30 calibres ; il en faudroit 25 pour la charge de 15 livres, 23 pour celle de 18 livres ; & comme dans les deux derniers cas, le moins de longueur ne dédommageroit point de l'excédant de la charge, il s'ensuit que le canon aura la longueur la plus avantageuse lorsqu'elle sera de 30 calibres, & que l'on tirera avec 12 livres depoudre ; c'est en effet ce qui arrive aux couleuvrines, dont on se sert principalement pour tirer loin (28).

---

(28) La Table que M. Euler donne dans cette remarque, pouvant être d'une grande utilité dans la pratique de l'Artillerie, j'ai cru devoir en calculer une pareille, qui pût servir à l'Artillerie françoise. Pour cela, outre le pied de Roi à substituer au pied de Rhin, il a fallu employer d'autres rapports entre les pesanteurs spécifiques de l'eau, de la poudre, & du fer des boulets : l'expérience m'ayant appris que ces pesanteurs sont respectivement comme 1 ; 0,9463 ; & 7,166 ; ce qui, en supposant l'eau 850 fois plus pesante que l'air, donne $m = 805$; $n = 6091,1$, & $\frac{16}{15} m = 858$. Si l'on prend 27 po. 9 li. pour la hauteur moyenne du barometre, & le mercure 13,575 fois plus pesant que l'eau, on a $h = 26683$ pieds, ces valeurs étant substituées dans la formule $v = \frac{1000\,bh}{k + 425\,b}\ l\ \frac{2a \cdot b}{b}$, & conservant d'ailleurs les autres dénominations, on aura $v = \frac{26683000\,Q}{858\,P + 425\,Q}\ l\ \frac{2574\,i\,P - 6091,1\,Q}{6091,1\,Q}$, ou j'observe que 858 étant, à peu de chose près, double de 425, on peut mettre 420 $(2\,P + Q)$ à la place de $858\,P + 425\,Q$, & que la fraction, qui est sous le signe logarithmique, peut, sans erreur sensible, être changée en celle-ci, $\frac{52\,i\,P - 123\,Q}{123\,Q}$; ensorte qu'il n'y a aucun inconvénient à employer l'é-

quation $v = \frac{26683000\,Q}{429(2P+Q)}\ l\ \frac{52iP-123Q}{123Q}$, ou $v = \frac{62199\,Q}{2P+Q}\ l\ \frac{52iP-123Q}{123Q}$ au lieu de la précédente, ce qui rend le calcul beaucoup plus ſimple. Enfin, ſi l'on multiplie cette valeur de v par 60,4, la racine quarrée du produit ſera la vîteſſe du boulet. Voici d'abord un exemple de ce calcul, en faveur de ceux qui n'auront pas ſous la main une Table des logarithmes hyperboliques : il faut ſeulement ſe rappeller qu'on réduit les logarithmes ordinaires en logarithmes hyperboliques, en les multipliant par le nombre 2,3025851, dont le logarithme ordinaire eſt 0,3622157. Suppoſons la longueur de l'ame de 20 diametres du boulet, ou $i = 20$, & la charge égale au tiers du poids du boulet, ou $Q = \frac{1}{3}P$, on aura $v = \frac{62199}{7}\ l\ \frac{999}{41}$, & $\sqrt{60,4\,v} = \sqrt{\frac{60,4 \times 62199}{7}\ l\ \frac{999}{41}}$ pieds, pour la vîteſſe du boulet.

OPÉRATION.

l 999 2,9995655
l 41 1,6127839

$l\ \frac{999}{41}$ . . . . . . 1,3867816 dont le logarithme

eſt . . . 0,1420081
l 2,3025851 . . 0,3622157
l 62199 4,7937834
comp. l 7 9,1549020
l 67,4 1,7810369

6,2339461
$l\ \sqrt{60,4\,v}$ . . 3,1169730 = l 1309

donc, dans une piece dont la longueur de l'ame eſt de 20 diametres du boulet, la charge égale au tiers de la peſanteur du boulet, lui communique une vîteſſe initiale de 1309 pieds par ſeconde.

TABLE des vîteſſes initiales du boulet, ſelon les charges & les longueurs des pieces.

Valeurs de i	VALEURS DE Q					
	$\frac{1}{6}$P	$\frac{2}{6}$P	$\frac{3}{6}$P	$\frac{4}{6}$P	$\frac{5}{6}$P	$\frac{\ }{6}$P
10	961	1149	1229	1255	1240	1211
12	989	1194	1290	1331	1342	1326
14	1012	1230	1338	1392	1414	1412
16	1031	1260	1378	1442	1473	1481
18	1048	1286	1412	1483	1522	1538
20	1063	1309	1442	1519	1564	1586
22	1076	1329	1468	1551	1601	1628
24	1087	1347	1491	1579	1633	1665
26	1098	1364	1512	1603	1662	1698
28	1108	1379	1531	1626	1689	1727
30	1117	1392	1549	1648	1713	1754
32	1126	1405	1565	1667	1735	1779
34	1134	1417	1580	1685	1755	1802
36	1141	1428	1594	1701	1774	1823
38	1148	1438	1607	1717	1792	1843
40	1154	1448	1620	1732	1808	1861

Voici

Voici une autre Table des viteſſes initiales du boulet, calculée d'après la même formule, relativement à l'état actuel de l'Artillerie de France. Les pieces de ſieges ou de batteries donnent pour i différentes valeurs, ſavoir; dans la piece de 24, $i = 20,94$; dans la piece de 16, $i = 23,02$; dans le 12, $i = 24,03$; dans le 8, $i = 25,36$; & pour le 4, $i = 26$. Les pieces de bataille de 12, 8 & 4 ſont preſque ſemblables entre elles, & donnent $i = 16,827$. A l'égard des charges, j'ai ſuppoſé le poids du boulet partagé en 48 parties égales, & la charge égale à 2, 3, 4, 5, &c. de ces parties, comme on le voit dans la premiere colonne de cette Table, c'eſt-à-dire, que les nombres de cette colonne indiquent des 48mes, de la peſanteur du boulet, de maniere que 4 livres de poudre, par exemple, ſont indiquées, pour le calibre de 24, par le nombre 8; pour le calibre de 16, par le nombre 12; pour le 12, par 16; pour le 8, par 24, & pour le 4, par 48 : d'où l'on voit que cette charge de 4 livres communique au boulet de 24 une viteſſe initiale de 1069 pieds par ſeconde; au boulet de 16, une viteſſe de 1232 pieds, &c. Les pieces de bataille étant ſemblables, c'eſt-à-dire, la lettre i ayant la même valeur dans les trois calibres, les boulets auront la même viteſſe initiale, quand les charges ſeront proportionnelles à leur poids : ainſi une livre de poudre dans le calibre de 4, deux livres dans le 8, trois livres dans le 12, qui ſont chacune le quart du poids du boulet, ou les $\frac{12}{48}$, communiquent à leurs boulets reſpectifs la même viteſſe initiale de 1176 pieds par ſeconde. Il ſera donc aiſé, par le moyen de cette Table, de trouver la charge qu'il conviendra d'employer, relativement à l'objet qu'on ſe propoſe.

Digitized by Google

TABLE des vîteſſes initiales du Boulet, communiquées par diverſes charges, dans les pieces de ſiege & de bataille.

VALEURS de Q en 48es. de P	24	16	12	8	4	De bataille 12. 8. 4.
2	640	646	649	652	654	627
3	750	758	761	765	767	733
4	836	845	849	853	856	816
5	908	917	922	927	930	884
6	969	980	985	991	993	943
7	1022	1034	1039	1046	1049	994
8	1069	1082	1088	1095	1098	1038
9	1111	1125	1131	1139	1143	1078
10	1149	1164	1171	1179	1183	1114
12	1215	1232	1239	1248	1251	1176
14	1271	1289	1298	1308	1312	1228
16	1319	1339	1348	1359	1364	1272
18	1360	1381	1391	1403	1408	1309
20	1396	1419	1429	1441	1447	1340
24	1455	1480	1492	1506	1512	1393
28	1500	1528	1541	1556	1563	1431
32	1535	1566	1579	1596	1604	1460
36	1562	1595	1610	1630	1637	1480
40	1582	1618	1634	1653	1662	1494
48	1607	1647	1665	1688	1698	1506

TROISIEME REMARQUE.

Les eſtimations que nous venons de faire étant confirmées par l'expérience, on pourra en déduire la regle ſuivante pour déterminer la longueur des pieces & les charges de poudre, relativement à tous les degrés de vîteſſe du boulet : ſoit n le nombre de pieds de Rhin que la vîteſſe du boulet lui fait parcourir en une ſeconde ; i le nombre de calibres ou diametres du boulet contenus dans la longueur de l'ame, le rapport du poids de la charge à celui du boulet comme m eſt à 1, ou $Q = mP$. v étant la hauteur relative à la vîteſſe du boulet, on aura $n = \frac{1}{4}\sqrt{1000\,v}$, & par conſéquent $v = \frac{16\,nn}{1000}$; mais on a trouvé plus haut, $v = \frac{61494\,Q}{2P+Q}\; l\, \frac{65\,iP - 158\,Q}{158\,Q}$, donc $v = \frac{61494\,m}{2+m}\; l\, \frac{65\,\frac{i}{m} - 158}{158}$ pieds de Rhin. Les longueurs de canon que nous avons déterminées ci-deſſus, & qui ſe trouvent confirmées par l'expérience, donnent preſque toujours le même rapport entre i & m ; ce rapport, pour les pieces de 24 qui ont 24 calibres de longueur, eſt comme 48 à 1 ; pour les pieces de 48 on a $i : m :: 36 : 1$, & pour les autres calibres la valeur de $\frac{i}{m}$ tombe entre 48 & 36. Mais comme les pieces de 24 paſſent pour être plus parfaites dans leur genre que celles de 48, il faut, pour une plus grande perfection, que la valeur de $\frac{i}{m}$ approche plus de 48 que de 36. Or les pieces de 24 n'ont, le

plus souvent, que 22 calibres de longueur, on a donc alors $\frac{i}{m} = 44$, & il est à présumer que dans la pratique on approchera beaucoup de cette perfection, en faisant $\frac{i}{m} = 45$. Supposant donc cette derniere valeur de $\frac{i}{m}$, il sera facile de trouver la charge la plus convenable pour une piece quelconque, dont on connoît la longueur en calibres; il n'y aura qu'à diviser par 45 le nombre des calibres contenus dans sa longueur, le quotient exprimera ce que la charge doit être à l'égard du poids du boulet. Ainsi, pour une piece dont la longueur est de 30 calibres, la charge la plus convenable sera les $\frac{2}{3}$ du poids du boulet. Et réciproquement, connoissant le rapport de la charge au poids du boulet, ou la quantité m, on trouvera facilement la longueur en calibre de la piece; car on a $i = 45\,m$. Donc si la charge est la moitié du poids du boulet, la longueur la plus avantageuse sera de $22\frac{1}{2}$ calibres. Et si l'on veut que le poids de la charge soit égal à celui du boulet, il faudra que la longueur de l'ame soit de 45 calibres.

Etant parvenu à trouver la valeur qu'il convient le mieux d'assigner à la fraction $\frac{i}{m}$, il sera facile de déterminer, pour chaque degré de vîtesse du boulet, la longueur de l'ame & la charge la plus avantageuse. Car la fraction $\frac{i}{m}$ ayant toujours la même valeur, le logarithme de $\frac{65\frac{i}{m} - 158}{158}$ sera aussi le même dans tous les les cas, ce qui abrege beaucoup le calcul. Soit

donc $\frac{i}{m} = 45$, on aura $l\,\frac{65\frac{i}{m} \cdot 158}{158} = l\,\frac{2767}{158} = 2{,}86292$; & puiſque $v = \frac{16nn}{1000}$, on aura $\frac{16nn}{1000} = \frac{61494m}{2+m} \times 2{,}86292$, & $nn = \frac{11003300m}{2+m}$; d'où l'on tire $\frac{2+m}{m} = 1 + \frac{2}{m} = 1 + \frac{90}{i} = \frac{11003300}{nn}$. Cette formule nous a ſervi à calculer la Table ſuivante, qui indique, pour chaque degré de vîteſſe du boulet, la longueur du canon en calibres, & la charge en milliemes parties de la peſanteur du boulet.

Vîteſſe du boulet par ſeconde, en pieds de Rhin.	*Longueur de l'ame en calibres & 100e. de calibre.*	*Poids de la charge en 1000es. parties du poids du boulet.*
500 . .	. . 2,09 . .	. . 46
550 . .	. . 2,54 . .	. . 57
600 . .	. . 3,04 . .	. . 68
650 . .	. . 3,59 . .	. . 80
700 . .	. . 4,19 . .	. . 93
750 . .	. . 4,85 . .	. . 108
800 . .	. . 5,56 . .	. . 124
850 . .	. . 6,32 . .	. . 141
900 . .	. . 7,15 . .	. . 159
950 . .	. . 8,02 . .	. . 179
1000 . .	. . 9,00 . .	. . 200
1050 . .	. . 10,02 . .	. . 223
1100 . .	. . 11,12 . .	. . 248

1150 . .	. . 12,29 . .	. . 273
1200 . .	. . 13,55 . .	. . 308
1250 . .	. . 14,89 . .	. . 331
1300 . .	. . 16,33 . .	. . 363
1350 . .	. . 17,87 . .	. . 397
1400 . .	. . 19,51 . .	. . 434
1450 . .	. . 21,26 . .	. . 484
1500 . .	. . 23,14 . .	. . 514
1550 . .	. . 25,14 . .	. . 559
1600 . .	. . 27,29 . .	. . 606
1650 . .	. . 29,59 . .	. . 659
1700 . .	. . 32,06 . .	. . 712
1750 . .	. . 34,71 . .	. . 771
1800 . .	. . 37,56 . .	. . 835
1850 . .	. . 40,63 . .	. . 903
1900 . .	. . 43,95 . .	. . 977
1950 . .	. . 47,53 . .	. . 1056
2000 . .	. . 51,40 . .	. . 1142
2050 . .	. . 55,61 . .	. . 1236
2100 . .	. . 60,20 . .	. . 1338
2150 . .	. . 65,20 . .	. . 1449
2200 . .	. . 70,68 . .	. . 1571

Il eſt facile, avec le ſecours de cette Table, de déterminer pour tous les cas la longueur la plus avantageuſe d'un canon & la charge qui convient à cette longueur, pourvu qu'on connoiſſe la viteſſe que le boulet doit avoir pour

l'objet qu'on ſe propoſe. Mais il eſt très-difficile de trouver ce degré de vîteſſe, puiſqu'on n'eſt point encore parvenu juſqu'à préſent à déterminer, même à peu près, la vîteſſe d'un boulet de canon (29). Néanmoins, comme cette vîteſſe peut ſe déduire par le calcul, & avec aſſez de préciſion, de la longueur de la piece & du poids de la charge, il ſuffira de faire pluſieurs épreuves avec une piece quelconque & avec différentes charges, juſqu'à ce qu'on en trouve une qui produiſe l'effet qu'on demande; par ce moyen, on pourra connoître, par le calcul, la vîteſſe propre à remplir cet objet. Il eſt cependant à obſerver que la piece d'épreuve doit être du même calibre que celle dont on cherche la longueur & la charge, & que les épreuves doivent ſe faire à la même diſtance; parce que la réſiſtance de l'air eſt différente, non-ſeulement ſur différens boulets, mais encore ſur le même boulet à différentes diſtances. Nous conſidérerons dans la ſuite cette inégalité, de maniere que, quand même les épreuves ſeroient faites avec des boulets inégaux, & à différentes diſtances, on puiſſe toujours en déduire la vîteſſe que l'on cherche. Si l'on fait, par exemple, que, pour battre en breche, le boulet de 24 doit avoir une vîteſſe de 1500 pieds par ſeconde, on trouvera dans la Table que ſa longueur doit être de 23 $\frac{14}{100}$ calibres, & la charge les $\frac{514}{000}$

(29) La vîteſſe initiale d'un boulet peut ſe déduire aſſez exactement de la portée, lorſqu'on connoît l'angle ſous lequel le boulet eſt parti, & la quantité dont il s'eſt abaiſſé dans ſa courſe, la loi de la réſiſtance de l'air étant d'ailleurs connue. C'eſt ce que nous examinerons plus particuliérement dans la ſuite.

du poids du boulet, ou environ de 12 $\frac{1}{3}$ livres, ce qui s'accorde assez bien avec ce que l'on pratique ordinairement en pareille circonstance. Il y a d'autres cas où il n'est pas nécessaire que le boulet ait une si grande vitesse, comme quand on tire à ricochet : il ne faut alors qu'une vitesse de 1000 pieds par seconde (30), 9 calibres suffiront pour la longueur & la cinquieme partie du poids du boulet pour le poids de la charge. Mais si l'on ne vouloit pas faire construire des pieces dont l'usage fût borné à cet objet, & qu'on voulût en employer d'autres plus longues, on pourroit économiser du côté de la poudre, puisque, par les Tables précédentes, il ne faudroit pas la sixieme partie du poids du boulet pour la charge qui, dans une piece de 20 calibres de longueur, communiqueroit au boulet une vitesse de 1000 pieds par seconde. Si l'on vouloit encore tirer avec justesse à une très-grande distance, & qu'il fût nécessaire à cet effet que le boulet eût une vîtesse de 1900 pieds par seconde, il ne feroit pas possible de remplir cet objet avec les gros calibres tels qu'on

(30) Cette vitesse de 1000 pieds de Rhin, ou de 966 pieds de Roi, est beaucoup trop grande pour le tir à ricochet, puisque la charge d'une livre est, le plus souvent, suffisante dans la piece de 24. Or cette charge, suivant la Table précédente, ne produit, dans ce calibre, qu'une vitesse initiale de 640 pieds par seconde. Au reste, tout dépend de l'éloignement de l'objet qu'on veut battre à ricochet, & de son élévation au dessus du niveau de la batterie : mais, dans tous les cas, il est rare qu'il faille plus de deux livres de poudre avec la piece de 24, c'est-à-dire, une vitesse de plus de 836 pieds par seconde ; & cette vitesse, on l'obtient avec une moindre charge dans les autres calibres.

les construit aujourd'hui ; il faudroit que leur longueur fût de 44 calibres, & la charge presqu'égale au poids du boulet ; on tireroit beaucoup plus loin avec un pareil canon, pourvu qu'il ne fut pas d'un trop petit calibre, qu'avec une couleuvrine dont la longueur seroit de 30 calibres, & la charge égale aux $\frac{2}{3}$ du poids du boulet. On pourroit aussi, d'après cette Table, construire des pieces de canon qui communiqueroient au boulet un mouvement encore plus rapide, si cela étoit néceſſaire.

QUATRIEME REMARQUE.

Après avoir ainsi trouvé la longueur du canon & le rapport de la charge à la pesanteur d'un boulet donné, on pourra facilement déterminer l'épaisseur que le métal doit avoir à chaque point de la longueur du canon. On imaginera, à cet effet, cette longueur divisée en deux parties, dont l'une sera occupée par la charge de la poudre, & l'autre est le chemin que le boulet parcourt dans le canon. L'épaisseur de la culasse, ou de la partie qui contient la poudre, dépend de l'effort de la poudre au premier instant de l'inflammation, c'est alors, & avant que le boulet soit ébranlé, que la poudre exerce la plus grande force. Si nous supposons donc avec l'Auteur, que le premier effort de la poudre est 1000 fois plus grand que la pression de l'athmosphere, qui équivaut au poids d'une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur ; il faudra que la culasse soit assez forte pour résister à la pression d'une colonne d'eau de 32000 pieds de hauteur. Si l'on pouvoit donc évaluer la force d'adhésion du

métal dont on fabrique les canons, on en déduiroit facilement l'épaiſſeur de la culaſſe ; car nous avons fait voir dans la troiſieme Remarque de la Propoſition IX, Chapitre I, que l'épaiſſeur du métal doit toujours avoir le même rapport avec le diametre du boulet. Il ne s'agit donc que de ſavoir, pour un ſeul cas, quel eſt le rapport de l'épaiſſeur du métal de la culaſſe au diametre du boulet, ce rapport auroit lieu pour les canons de tout autre calibre. L'expérience nous apprend qu'aux pieces de batteries, l'épaiſſeur à la culaſſe doit être d'un calibre ou diametre du boulet : d'où l'on déduit cette regle générale, que pour toute eſpece de canons, l'épaiſſeur du métal à la culaſſe doit être d'un calibre. Cette regle eſt fondée ſur deux points principaux, ſur la force d'adhéſion du métal, & ſur la force expanſive de la poudre. Si l'on découvroit un autre alliage qui augmentât la réſiſtance du métal, une moindre épaiſſeur à la culaſſe ſuffiroit pour ſoutenir l'effort de la poudre ; mais ſi l'on pouvoit en même temps rendre la poudre plus forte, il faudroit au contraire augmenter l'épaiſſeur du métal. Car quand même on diminueroit la charge dans ce dernier cas, il n'en réſulteroit pas pour cela, au premier inſtant de l'inflammation, une force expanſive moindre qu'avec une charge plus grande. D'où l'on voit que ſi l'on parvenoit à augmenter ſenſiblement la force de la poudre, les canons actuellement conſtruits ne pourroient plus ſervir. Mais tant qu'on emploiera la même ſorte de poudre, que la charge ſoit forte ou foible, la culaſſe aura toujours le même effort à ſoutenir ; & ſi elle réſiſte à une petite charge, elle

ne résistera pas moins à une plus grande (31). Il n'en est pas de même de l'effort que la volée a à soutenir : car la force de la poudre diminuant toujours à mesure qu'elle s'étend dans un grand espace, il est évident que l'effort que la poudre exerce contre chaque partie de la volée, est d'autant plus considérable, que la charge est plus forte ; ainsi, pour que la volée ait l'épaisseur la plus convenable, il faudra la déterminer relativement à la plus forte charge qu'on voudra employer. Soit, par exemple, AF, fig. 1, la plus forte charge qu'on puisse employer dans le canon AB ; AF sera la culasse, & FB la volée : l'épaisseur du métal à la culasse sera partout d'un diametre du boulet ; & comme la poudre agit également sur toutes les parties de la culasse, il est inutile que le métal ait plus d'épaisseur en A qu'en F ; d'où l'on voit qu'on pourroit épargner du métal dans la fonte des canons, & les rendre plus légers sans qu'il y ait d'accident à craindre (32) ; car si l'épaisseur en E, qui est déjà un peu moindre que le diametre du boulet, suffit pour résister à l'effort de

(31) M. Euler fait sans doute abstraction ici de la chaleur qui accompagne l'inflammation de la poudre : elle a certainement plus d'intensité dans une grande quantité de poudre, que dans une moindre ; & la force expansive du fluide élastique produit par l'inflammation d'une petite charge, étant, par cette raison, moindre que lorsque la charge est plus grande, celle-ci doit exercer contre la culasse un plus grand effort que l'autre.

(32) Lorsque ceci a été écrit, il y avoit long-temps que, dans l'Artillerie françoise, l'épaisseur du métal à la culasse étoit réduite à un diametre du boulet. L'expérience a même appris depuis, que, pour les pieces de bataille, cette épaisseur pouvoit encore être diminuée.

la poudre, la même épaiſſeur conviendra auſſi en D. A l'égard de la volée FB, il eſt facile de déterminer l'effort de la poudre contre chaque point M, lorſque le boulet y eſt arrivé: ſuivant l'Auteur, cette force de la poudre en M eſt à ſa force primitive, celle qu'elle exerce contre la culaſſe, comme AF eſt à AM; l'épaiſſeur du métal pourroit donc être moindre en M qu'en A, ſelon le rapport de AF à AM, de maniere que la ſurface extérieure du canon auroit une courbure hyperbolique. Notre théorie de la force de la poudre n'exige pas autant d'épaiſſeur de métal à la volée que celle de l'Auteur, parce que nous ſuppoſons que cette force s'affoiblit davantage pendant que le boulet parcourt l'ame de la piece. Mais comme ces théories ſont l'une & l'autre fondées ſur l'inſtantanéité de l'inflammation de la poudre, & qu'elle eſt réellement ſucceſſive; il faut que l'effort de la poudre contre les parois de la volée ſoit plus grand, eu égard à l'effort primitif, & que le métal à la volée ait par conſéquent un peu plus d'épaiſſeur qu'il ne réſulte de ces théories.

Mais quand même on pourroit aſſujettir l'inflammation ſucceſſive au calcul, il eſt une autre circonſtance à conſidérer, qui rend l'évaluation de l'épaiſſeur du métal à la volée très-difficile & preſqu'impoſſible: c'eſt que la volée n'a pas ſeulement l'effort de la poudre à ſoutenir, mais encore celui qui provient des battemens du boulet, & qui eſt quelquefois très-conſidérable. Il eſt vrai que ſi l'ame de la piece étoit parfaitement en ligne droite, & que le mouvement du boulet fût conſtamment dirigé ſuivant cette ligne, il ne ſeroit aucun effort contre le

canon, & en fortiroit fans avoir touché les parois intérieures; attendu que fa pefanteur, par laquelle le côté inférieur pourroit être preffé, doit être comptée pour rien. Mais pour peu que l'ame de la piece fût courbée, le boulet feroit obligé de fe détourner de fa premiere direction, & réagiroit alors contre le canon en vertu d'une force centrifuge, qui peut être très-confidérable: car fi l'on fuppofe que l'ame du canon foit courbée en quelque endroit de maniere que le rayon de la courbure foit $= r$, & qu'à cet endroit la vîteffe du boulet foit due à une hauteur $= v$; la preffion du boulet contre les parois intérieures fera à fa pefanteur comme $\frac{v v}{r}$ eft à 1. Si, par exemple, le rayon de la courbure eft de 100 pieds, & la vîteffe du boulet de 1500 pieds par feconde, on aura $v = 36000$, & le boulet exercera contre le canon une preffion 720 fois plus grande qu'il ne réfulteroit de fa pefanteur; l'effet de cette preffion furpafferoit d'autant plus celui de l'expanfion de la poudre, que toute fa force feroit réunie en un feul & très-petit efpace. Cette circonftance peut fe rencontrer même dans un canon dont l'ame feroit bien droite; il fuffit que le boulet ne foit pas chaffé fuivant la direction de l'axe de la piece, le canon fera alors expofé au même accident que fi l'ame étoit courbée relativement au mouvement du boulet. D'autres caufes encore peuvent concourir à écarter le boulet de la direction de l'axe du canon: de ce nombre eft le vent du boulet, & lorfque la direction de la force impulfive de la poudre ne paffe point par le centre de gravité du boulet. Ces caufes

influent plus ou moins ſur le mouvement du boulet, & peuvent ſervir à expliquer pourquoi une piece de canon vient à crever avec une charge médiocre, quoiqu'elle ait réſiſté nombre de fois à des charges beaucoup plus fortes. On voit donc combien il eſt néceſſaire, à cauſe de l'incertitude des effets dont nous venons de parler, de renforcer la volée en donnant au métal plus d'épaiſſeur qu'il n'eſt preſcrit par les deux regles rapportées plus haut. Ces effets ſont d'autant plus à craindre, que les pieces ſont plus longues : c'eſt dans les pieces longues que le boulet eſt le plus ſujet à s'écarter de l'axe & à rencontrer les parois de l'ame ; & comme le boulet y acquiert une viteſſe plus conſidérable, ſa force centrifuge, ou l'effort qu'il fait ſur la volée, qui croît comme le quarré de cette viteſſe, doit auſſi devenir plus grande que dans une piece plus courte.

Enfin n'oublions pas d'obſerver que cette preſſion du boulet contre les parois du canon ne contribue pas peu à ralentir ſon mouvement : il en réſulte un frottement qui, quoique de peu d'effet dans d'autres circonſtances, augmente, comme on ſait, à meſure que deux corps ſont plus preſſés l'un contre l'autre ; & comme cette preſſion dépend de pluſieurs cauſes, il peut arriver que deux boulets de même calibre, chaſſés avec des quantités égales de poudre, partent avec des viteſſes très-différentes. Néanmoins il ſemble que ces irrégularités ne ſont pas abſolument inévitables, & qu'on pourra les prévenir en grande partie, ſi l'on a ſoin de forer les canons bien droit, ſi l'on n'emploie que des boulets parfaitement ronds, & ſi, en chargeant la

piece, on a l'attention de placer le boulet de façon que son centre soit dans l'axe de l'ame, & que la charge de poudre soit tellement disposée, qu'elle agisse également sur toutes les parties du boulet. Par ce moyen, non-seulement les canons auront moins d'effort à soutenir, mais l'on sera encore plus assuré de la justesse du tir, comme nous le ferons voir par la suite.

CINQUIEME REMARQUE.

Ce que l'Auteur objecte dans cette Proposition contre le sentiment de ceux qui prétendent que l'espace parcouru par un boulet au commencement de sa course est une ligne parfaitement droite, est de la derniere évidence. La vîtesse du boulet est d'abord si prodigieuse, que la courbure de la ligne que sa pesanteur lui fait parcourir, n'est pas encore sensible, même à une grande distance. Car si la vîtesse du boulet est relative à une hauteur v, & qu'il soit tiré suivant une direction horizontale, il faudra que le rayon du cercle qui a la même courbure que la trajectoire du boulet, soit $= 2v$. Ainsi, lorsque la vîtesse du boulet est de 1500 pieds par seconde, on a $v = 36000$, & le chemin du boulet aura une courbure de 72000 pieds de rayon. Or, cette courbure ne comporte qu'un degré à la distance de 1256 pieds. Mais quoiqu'à cause de la résistance de l'air, cette distance soit un peu moindre, elle est cependant encore assez grande pour que dans la pratique, on puisse sans erreur regarder une prande partie de la trajectoire comme une ligne droite; c'est ce que les Artilleurs nomment communément *portée de*

but en blanc (33). Nous ne nous arrêterons pas plus long-temps ſur ce ſujet, que nous reprendrons dans la ſuite, pour nous occuper de ce que l'Auteur dit concernant les charges du plus grand effet, quoique cette matiere ait déjà été traitée dans la cinquieme Remarque de la Propoſition XI. Il eſt aiſé de voir, par la ſeule inſpection de la Table de la ſeconde Remarque de cette Propoſition, que pour chaque longueur de canon il y a une charge qui communique au boulet la plus grande vîteſſe poſſible : car on y voit qu'un boulet tiré d'un canon qui a 10 calibres de longueur, avec une charge égale aux $\frac{2}{3}$ de ſon poids, reçoit une vîteſſe plus grande qu'avec une plus forte charge ; on voit auſſi que dans les canons de 12 & 14 calibres de longueur, la charge égale au poids du boulet fait moins d'effet qu'une charge plus foible.

L'Auteur déduit la grandeur de cette plus forte charge, de la regle qu'il a donnée pour trouver la vîteſſe du boulet, & qui eſt exprimée par cette formule $v = \frac{1000\,bh}{k}\ l\ \frac{a}{b}$.

---

(33) L'uſage actuel eſt de nommer *portée de but en blanc* la diſtance du canon au ſecond point d'interſection de la ligne de mire avec la courbe décrite par le boulet. La ligne de mire eſt, comme on ſait, une ligne droite menée dans le plan vertical qui paſſe par l'axe du canon, & raſe la ſurface extérieure de la piece, en paſſant ſur la plate-bande de la culaſſe, & ſur le plus grand renflement de la bouche. Ainſi l'on tire de but en blanc, quand cette ligne de mire aboutit à l'objet que le boulet doit frapper. La portée de but en blanc dépend eſſentiellement des dimenſions de la piece de canon, de la vîteſſe initiale du boulet, &, à cauſe de la réſiſtance de l'air, de ſon diametre & de ſa matiere.

Mais

Mais comme dans cette formule on a négligé nombre de circonſtances qui ne laiſſent pas de produire quelques changemens, il n'eſt pas étonnant que les charges trouvées par l'Auteur pour celles du plus grand effet ſoient ſi différentes des nôtres. Il trouve par cette formule que, pour la charge du plus grand effet, il faut que la longueur b de l'eſpace, qui renferme la poudre, ait toujours le même rapport avec la longueur du canon, celui de 1 à 2,71828, qui eſt le nombre dont l'unité eſt le logarithme hyperbolique. Mais, ſelon notre théorie, ce rapport ne doit pas être conſtant, il dépend non-ſeulement du nombre de calibres que la piece contient dans ſa longueur, mais encore de la matiere du boulet, comme on peut s'en aſſurer par les Tables précédentes. Il eſt aiſé de trouver la charge du plus grand effet par la formule de l'Auteur, en employant la méthode des *maximis* & *minimis*: car les quantités k & h étant des grandeurs conſtantes, il ne s'agit que de trouver pour b une valeur telle que $bl\frac{a}{b}$ ſoit un *maximum*. Pour cela il faut différencier $bl\frac{a}{b}$, en ne regardant que b comme variable, ce qui donne $dbl\frac{a}{b} - db$, qu'il faut égaler à zéro, & l'on aura $l\frac{a}{b} = 1$. Comme il s'agit ici de logarithmes hyperboliques, il faut que $\frac{a}{b} =$ 2,7182818 &c.; d'où l'on tire $b:a::1:2,71828$, ainſi que l'Auteur l'a trouvé. Maintenant, puiſque $l\frac{a}{b} = 1$, il s'enſuit que, ſelon l'Auteur, la plus grande vîteſſe du boulet eſt due à une hauteur $v = \frac{1000\,bh}{k}$. Afin de comparer d'autres

viteſſes plus petites avec celle-ci, on remarquera que dans l'hyperbole LEF (fig. 22), lorſque AD $= b$ & AB $= a$, le quadrilatere ADEG eſt conſtant, & qu'il eſt à la figure EDBF, comme 1 eſt au logarithme hyperbolique de $\frac{AB}{AD}$; & comme ce logarithme eſt $= 1$, il s'enſuit que la figure DEFB eſt égale au rectangle ADEG; ſoit DE $= f$, la figure DEFB ſera $= bfl\,\frac{a}{b}$, c'eſt-à-dire exprimée par bf. Soit maintenant une autre charge qui occupe la longueur AI, que nous ferons $= \beta$, le quarré de la plus grande vîteſſe ſera au quarré de celle qui réſulte de la charge AI, comme bf eſt à $\beta fl\,\frac{a}{\beta}$; mais $l\,\frac{a}{\beta} = l\,\frac{a}{b} + l\,\frac{b}{\beta} = 1 + l\,\frac{b}{\beta}$, parce que $l\,\frac{a}{b} = 1$; ce rapport ſera donc comme bf eſt à $\beta f + \beta fl\,\frac{b}{\beta}$. Mais, par la nature de l'hyperbole, $\beta fl\,\frac{b}{\beta}$ exprime l'eſpace IHKD, & βf le rectangle AIHG, donc $\beta f + \beta fl\,\frac{b}{\beta} =$ AGHI + IHKD = ADEG − HEK. D'où il ſuit que le quarré de la plus grande vîteſſe eſt au quarré de la vîteſſe communiquée par une moindre charge, dont la longueur = AI, comme ADEG eſt ADEG — HEK, comme l'Auteur le trouve. Nous n'avons examiné que le cas où la charge AI eſt moindre que la plus forte AD; lorſque AI eſt plus grand que AD, & $\beta > b$, le raiſonnement ſera le même, en obſervant qu'alors l'eſpace DKHI n'eſt point exprimé par $\beta fl\,\frac{b}{\beta}$, mais par $\beta fl\,\frac{\beta}{b}$, ou par $-\beta fl\,\frac{b}{\beta}$.

Quoique nous ayons déjà déterminé la charge du plus grand effet par une formule, qui donne des résultats plus conformes à la vérité que celle de l'Auteur ; cependant comme la lettre a n'y repréſente pas la longueur totale de l'ame du canon, & que par cette raiſon la Table calculée d'après cette formule, oblige de prendre les longueurs un peu plus grandes qu'elles n'y ſont indiquées ; nous croyons que, pour éviter cet inconvénient, & pour approcher encore plus de la vérité, il vaut mieux employer notre derniere formule des vîteſſes, celle où nous avons conſidéré le vent du boulet. L'équation $v = \frac{1000bh}{k+455b}\, l\, \frac{2a-b}{b}$ donne pour v la plus grande valeur poſſible, lorſque $\frac{b}{k+455b}\, l\, \frac{2a-b}{b}$ eſt un *maximum* : pour le trouver, on égalera ſa différentielle à zéro, & on aura $\frac{kdb}{(k+455b)^2}\, l\, \frac{2a-b}{b} - \frac{2adb}{(k+455b)(2a-b)} = 0$, ou $l\, \frac{2a-b}{b} = \frac{2a(k+455b)}{(2a-b)k}$. Soit $\frac{2a-b}{b} = u$, on aura $b = \frac{2a}{1+u}$, & $lu = 1 + \frac{1}{u} + \frac{910a}{ku}$. Si l'on ſuppoſe maintenant que la longueur de la piece ſoit de i calibres, & la matiere du boulet n fois plus peſante que l'air, on aura $k : a :: 910 : \frac{1365i}{n}$, & par conſéquent $lu = 1 + \frac{1}{u} + \frac{1365i}{nu}$. Si le boulet eſt de fer, n ſera $= 6650$, & $\frac{1365}{n} = \frac{1}{5}$ à peu près, d'où l'on tire $lu = 1 + \frac{i+5}{5u}$.

Quoique par cette équation on ne puiſſe point avoir une valeur générale de u, il eſt cependant

possible d'en trouver une par approximation pour chaque cas particulier. Soit, par exemple, $i = 30$, on aura $lu = 1 + \frac{7}{u}$, & l'on verra bientôt, par le moyen d'une Table de logarithmes hyperboliques, que la valeur de u est entre 7 & 8. Donnons donc à u chacune de ces deux valeurs, & remarquons les différences qui en résulteront.

$u = 7$	$u = 8$
$lu = 1{,}945909$	$lu = 2{,}079441$
$1 + \frac{7}{u} = 2{,}000000$	$1 + \frac{7}{u} = 1{,}875000$
différence $-$ 0,054091	différence $+$ 0,204441

Ces deux différences ayant des signes contraires, on les ajoutera & l'on dira : la somme de ces différences est à 1, différences des deux valeurs supposées de u, comme 054091 est à l'excès de la vraie valeur de u sur 7, que l'on trouve $= 0{,}21$; donc $u = 7{,}21$; & puisque $a = 30c$, on aura $b = \frac{60c}{8{,}21} = 7{,}31c$. D'où l'on peut aussi déduire le rapport du poids de la plus forte charge à celui du boulet ; car si le poids du boulet $= P$, le poids de la charge $= Q$, & qu'on fasse $Q = mP$, on aura à peu près $m = \frac{b}{5c}$. C'est sur ce fondement qu'on a calculé la Table suivante.

TABLE DES PLUS FORTES CHARGES.

LONGUEUR de l'ame EN CALIBRES.	*LONGUEUR de la charge EN CALIBRES.*	*Poids de la charge en centieme du poids du boulet.*
2	0,82	16
4	1,54	31
6	2,18	43
8	2,78	56
10	3,35	67
12	3,86	77
14	4,30	86
16	4,77	95
18	5,20	104
20	5,59	112
22	5,96	119
24	6,32	126
26	6,66	133
28	6,99	140
30	7,31	146
32	7,61	152
34	7,90	158
36	8,18	163
38	8,44	169
40	8,69	174
42	8,93	179
44	9,18	184
46	9,42	188
48	9,66	193
50	9,89	198
52	10,11	202
54	10,31	206
56	10,51	210
58	10,71	214
60	10,90	218

Cette Table ayant été calculée sur la formule que nous avons trouvée en dernier lieu, & dans laquelle on a eu égard à toutes les circonstances, excepté l'inflammation successive de la poudre; il n'est pas douteux que les plus fortes charges qu'elle renferme n'approchent beaucoup plus de la vérité, que celles qu'on déduiroit de la formule de l'Auteur, & même celles que nous avons données à la suite de la Proposition XI. du premier Chapitre. On voit d'abord que les plus fortes charges de cette derniere Table, sont toutes plus petites que celles de la premiere Table; & en second lieu, si on les compare avec celles qui résultent de la théorie de l'Auteur, on trouve que pour des longueurs de canon moindres que 6 calibres, nos plus fortes charges sont moindres que celles de l'Auteur; qu'elles s'accordent parfaitement, lorsque la longueur est de 6 calibres; mais qu'au dessus nos résultats different d'autant plus que les pieces sont plus longues. Si, par exemple, la longueur de l'ame est de 60 calibres, la regle de l'Auteur donne 22 calibres pour celle de la charge, & la nôtre n'en donne qu'environ la moitié. S'il étoit possible de fabriquer un canon qui eut 1000 calibres de longueur, celle de la plus forte charge pour cette piece ne passeroit pas 49 $\frac{3}{4}$ calibres, & son poids ne seroit qu'environ 10 fois plus grand que celui du boulet. Enfin il y a toute apparence que ces plus fortes charges diminueroient encore, si l'on avoit égard à l'inflammation successive de la poudre, ce qui ne laisse aucun doute que les plus fortes charges, sui-

vant la regle de l'Auteur, ne font beaucoup trop grandes (34).

(34) Voici une Table des plus fortes charges pour les canons de l'Artillerie françoife : elle eft calculée fur le même principe que celle de M. Euler.

TABLE des charges du plus grand effet, dans les pieces de fiége & de bataille.

CALIBRES des PIECES.		LONGUEURS de la charge EN CALIBRES.	POIDS de la charge EN LIVRES.	VITESSES réfultantes de ces charges.
Pieces de fiége.	24	..5,6564..	..28,704..	..1616
	16	..6,0326..	..20,410..	..1663
	12	..6,2093..	..15,656..	..1685
	8	..6,4388..	..10,892..	..1713
	4	..6,5517	5,542	1725
De bataille.	12	4,8701	12,358	1510
	8		8,238	
	4		4,119	

En comparant les viteffes de cette Table avec celles de la Table précédente, on voit qu'elles different peu des viteffes que donne, dans chaque calibre, la charge égale au poids du boulet, & qu'il s'en faut peu, par conféquent, que cette charge, fur-tout dans les pieces de bataille, ne foit celle du plus grand effet.

PROPOSITION V.

Un Boulet de 24 tiré à pleine charge, éprouve de la part de l'air, lorsqu'il sort du canon, une résistance dont la force équivaut à plus de 20 fois sa pesanteur.

Nous avons démontré, dans la Proposition II. de ce Chapitre, que la résistance que l'air oppose à une balle de $\frac{3}{4}$ de pouce de diametre, & dont la vîtesse est de 1670 pieds par seconde, étoit égale à un poids de 10 livres. On a vu aussi, dans la Proposition précédente, qu'un boulet de 24 tiré avec 16 livres de poudre, qui est la charge la plus convenable pour battre en breche, partoit avec une vîtesse de 1650 pieds par seconde, vîtesse qui differe très-peu de celle de la balle. Mais la surface du boulet est plus de 54 fois aussi grande que celle de la balle, & comme ces deux mobiles ont la même vîtesse, il s'ensuit que le boulet éprouve de la part de l'air une résistance de plus de 540 livres, ou, à peu près, de 23 fois le poids du boulet.

Scholie.

Nous avons déjà fait observer, dans l'Avant-Propos de cet Ouvrage, que tous les Auteurs qui ont écrit sur l'Artillerie, ont posé pour principe, que la courbe décrite par les projectiles l'Artillerie, étoit une parabole, ou en approchoit beaucoup. L'objet des deux dernieres Proposi-

Google

tions eſt ſur-tout de démontrer la fauſſeté de cette opinion, qui n'a d'autre fondement que le peu d'effet que ces Auteurs attribuoient à la réſiſtance de l'air. Et comme il eſt démontré que la courbe décrite par un projectile eſt en effet une parabole, lorſque le milieu n'oppoſe point de réſiſtance, ils n'ont point héſité à conclure que des corps auſſi peſans que les bombes & les boulets, ne devant point ſe reſſentir de l'action d'une matiere auſſi ſubtile que l'air; la courbe qu'ils décrivent étoit par conſéquent une parabole.

Mais on reviendra bientôt d'un pareil préjugé, ſi l'on fait attention à la force ſurprenante que l'air, par ſa réſiſtance, exerce contre un boulet de 24, ainſi que nous venons de le faire voir. Car on ne peut, ſans une prévention aveugle, regarder comme nulle une force qui eſt plus de 20 fois auſſi grande que le corps ſur lequel elle agit. Mais ce n'eſt point aſſez d'avoir fait connoître toute l'efficacité de la réſiſtance de l'air; nous devons encore entrer dans quelques détails pour connoître la courbe que les projectiles décrivent réellement dans l'air. Nous ferons voir par pluſieurs expériences combien cette courbe differe de celle qu'ils décriroient, ſuivant l'opinion commune. Mais il eſt néceſſaire de faire d'abord mention des principaux théoremes que l'on trouve dans les Auteurs qui traitent de cette matiere.

Théoreme 1. Lorſque la réſiſtance de l'air eſt aſſez peu conſidérable, pour qu'un projectile puiſſe y décrire une parabole, l'axe de cette parabole eſt une ligne verticale, & par conſéquent le chemin que le mobile parcourt en mon-

tant eſt une demi-parabole égale & ſemblable à celle qu'il parcourt en deſcendant.

Théor. 2. Lorſque la parabole décrite par un projectile eſt appuyée ſur un plan horizontal, le point le plus élevé de la courbe eſt également éloigné de ſes deux extrémités.

Théor. 3. Dans ce cas le mobile terminera ſa courſe ſous le même angle, & avec la même vîteſſe qu'il l'a commencée.

Théor. 4. Si un corps eſt projeté avec la même vîteſſe ſous différens angles, la plus grande amplitude ſera celle de la parabole qu'il décrit, étant projeté ſous l'angle de 45 degrés.

Théor. 5. Quand on connoît la vîteſſe avec laquelle un corps eſt projeté, on connoîtra la plus grande amplitude, en cherchant la hauteur dont un corps devroit tomber pour acquérir cette vîteſſe, la plus grande amplitude ſera égale au double de cette hauteur.

Théor. 6. Les amplitudes horizontales des paraboles décrites avec la même vîteſſe, ſous différens angles, ſont entre elles comme les ſinus du double des angles de projection.

Théor. 7. Les amplitudes ſous le même angle & avec différentes vîteſſes, ſont entre elles comme les quarrés de ces vîteſſes.

Ces théoremes renferment toute la doctrine du mouvement des projectiles, telle qu'on la trouve dans les Auteurs qui ont écrit ſur l'Artillerie. Si donc quelques-uns de ces théoremes ne s'accordent point avec le mouvement des corps projetés, il s'enſuivra inconteſtablement que la courbe qu'ils décrivent n'eſt point une parabole. La doctrine commune du mouvement des corps projetés ſera donc entiérement ren-

verſée, ſi nous faiſons voir qu'aucun de ces principes ne s'accorde avec l'expérience.

PREMIERE REMARQUE.

L'Auteur ſe propoſe ici de connoître l'intenſité de la réſiſtance que l'air oppoſe à un boulet de 24, dont la viteſſe eſt de 1650 pieds par ſeconde, & il démontre que cette réſiſtance équivaut à plus de 20 fois le poids du boulet. Pour le prouver, il ſe fonde ſur la réſiſtance qu'il a trouvée pour une balle de $\frac{3}{4}$ de pouce de diametre, & dont la viteſſe étoit de 1670 pieds par ſeconde : ces deux viteſſes différant peu l'une de l'autre, les réſiſtances que ces deux mobiles éprouvent, doivent être entre elles comme les quarrés de leurs diametres, parce que les ſurfaces de deux ſpheres ſont proportionnelles aux quarrés de leurs diametres. Nous obſerverons en paſſant que la ſurface d'un boulet de 24 étant, ſelon l'Auteur, à la ſurface d'une balle dont le diametre eſt de $\frac{3}{4}$ de pouce, dans un rapport plus grand que celui de 54 à 1, il s'enſuit que le diametre du boulet de 24 doit être $= \frac{3}{4} \sqrt{54}$, ou à peu près de $5\frac{1}{2}$ pouces; ainſi, un boulet de fer qui a $5\frac{1}{2}$ pouces de diametre peſe 24 livres, ce qui détermine le diametre de tout autre boulet de fer dont on connoît le poids. La formule que nous avons trouvée ci-devant, pour exprimer la réſiſtance de l'air, peut nous ſervir à déterminer dans tous les cas le rapport de la réſiſtance au poids du boulet. Car ſoit le diametre du boulet $= c$, & v la hauteur d'où la viteſſe a été acquiſe, nous avons vu que la force de la réſiſtance

peut être exprimée par le poids d'une colonne d'air, dont la hauteur $= \frac{1}{2} v + \frac{vv}{2h}$; h exprimant une hauteur de 28845 pieds anglois, ou de 27979 pieds de Rhin. De plus, le boulet est égal à un cylindre de même matiere & de même diametre, dont la hauteur $= \frac{2}{3} c$; & si la matiere du boulet est n fois plus pesante que l'air, le poids du boulet sera égal au poids d'une colonne d'air d'une hauteur $= \frac{2}{3} nc$. La résistance qu'éprouve le boulet est donc à sa pesanteur, comme $\frac{1}{2} v + \frac{vv}{2h}$ est à $\frac{2}{3} nc$, ou comme $\frac{3v(h+v)}{4nch}$ est à 1. Ainsi le fer étant 6647 fois plus pesant que l'air, la résistance d'un boulet de fer est à sa pesanteur comme $\frac{v(h+v)}{8863\,ch}$ est à 1. Supposons maintenant que la vitesse soit de 1650 pieds anglois, ou 1600 pieds de Rhin par seconde, on aura $v = 40960$ pieds de Rhin, ou 42226 pieds anglois; & $h + v =$ 71071 pieds anglois: la résistance sera donc au poids du boulet, comme 11,7386 pieds est au diametre du boulet; & comme, selon le calcul de l'Auteur, le diametre du boulet de 24 est de $\frac{11}{24}$ de pieds, la résistance sera à son poids, comme 11,7386 est à $\frac{11}{24}$, ou comme 25,6615 est à 1. La force de cette résistance est donc plus que 25 $\frac{1}{2}$ fois plus grande que le poids du boulet. Il n'est pas nécessaire d'examiner pourquoi l'Auteur n'a trouvé cette résistance que 23 fois plus grande que le poids du boulet: son intention n'étoit point de déterminer la résistance absolue, mais de prouver seulement qu'elle passoit 20 fois le poids du boulet; il pouvoit donc

se dispenser de considérer plusieurs circonstances, afin que l'on pût d'autant moins douter de la vérité de sa Proposition.

Puisque la résistance de l'air est si considérable, il n'est plus possible d'admettre que, suivant l'opinion commune, les projectiles se meuvent dans une parabole. Cette opinion ne pourroit pas même se soutenir, quand on supposeroit la résistance égale au poids du boulet. Il y a longtemps que la fausseté de ce systême est reconnue, quoique le commun des Artilleurs s'en soit peu embarrassé; c'est donc à tort que l'Auteur prétend avoir été le premier à en découvrir l'erreur. Nous avons insinué dans notre Remarque sur l'Avant-Propos, que non-seulement cette erreur étoit connue depuis long-temps, mais qu'on avoit même rectifié la doctrine du mouvement des projectiles, au point d'avoir déterminé la nature de la courbe qu'ils décrivent dans l'air. On ne peut néanmoins refuser à l'Auteur le mérite d'avoir fait voir le premier, que la résistance de l'air augmente considérablement lorsque le mouvement est rapide : il a éclairé les Savans sur cet article, & a perfectionné en même temps la théorie de la résistance de l'air.

SECONDE REMARQUE.

Le dessein de l'Auteur étant de prouver dans la Proposition suivante que la courbe décrite par les corps projetés est très-différente de la parabole, il a cru devoir remettre sous les yeux du Lecteur les principales propriétés du mouvement parabolique. Car comme il n'est guere possible de déterminer la vraie trajectoire des pro-

jectiles par la seule expérience, il doit être très-difficile de trouver immédiatement la différence de cette courbe à une parabole. C'est pourquoi l'Auteur considere d'abord quelques-unes des propriétés du mouvement parabolique, afin de découvrir ensuite si ces propriétés s'accordent ou non avec le mouvement réel des corps dans l'air; étant certain que si une seule de ces propriétés n'a point lieu dans l'air, il sera démontré que la courbe décrite dans l'air par un projectile, n'est point une parabole. Quoique la théorie du mouvement parabolique se trouve dans un grand nombre de livres, nous en parlerons cependant encore ici, en l'établissant sur les premiers principes du mouvement, soit pour en mieux constater la vérité, soit sur-tout pour déterminer avec plus de facilité, par la même méthode, le vrai mouvement d'un corps dans l'air.

Galilée avoit déjà trouvé qu'un corps projeté dans le vuide, ou dans un milieu non résistant, décrivoit une parabole; & d'après ce principe, la plupart des Auteurs qui ont écrit sur l'Artillerie, ont regardé le chemin parcouru par une bombe ou un boulet, comme une parabole; non pas qu'ils eussent pensé que ces mobiles ne trouvoient aucune résistance dans l'air; mais cette résistance, selon eux, devoit être si peu efficace, qu'eu égard à la pesanteur de ces corps, elle n'étoit point capable d'altérer leur mouvement. Nous supposerons donc que les corps ne rencontrent aucune résistance, & nous chercherons par les principes du mouvement quelle est, dans cette hypothese, la courbe que décrit un corps projeté avec une vitesse



donnée, & ſuivant une direction qui faſſe avec l'horizon un angle donné.

Soit EF (fig. 23) une ligne horizontale; EH la direction ſuivant laquelle un mobile eſt projeté avec la vîteſſe qu'il auroit acquiſe en tombant d'une hauteur $= b$, & EMAF, la courbe qu'il décrit dans ſon mouvement. Nous nommerons I l'angle HEF, que la direction EH fait avec l'horizontale EF. La vîteſſe du mobile en partant du point E, pouvant être exprimée par $\sqrt{b}$, ſi l'on décompoſe ſon mouvement en deux autres, dont l'un ſoit dirigé ſuivant la verticale EG, & l'autre ſuivant l'horizontale EF; la vîteſſe ſuivant la premiere ſera $= \sqrt{b}\, \mathit{ſin.}\, I$, & la vîteſſe ſuivant l'autre $= \sqrt{b}\, \mathit{coſ.}\, I$, le ſinus total étant $= 1$. Suppoſons maintenant le corps arrivé en M, d'où l'on abaiſſera la perpendiculaire MP; ſoit EP $= x$, PM $= y$, & le temps employé à parcourir EM $= t$. Pendant l'inſtant dt, le corps parcourra Mm, & ſa vîteſſe en M ſera $\frac{Mm}{dt}$. Décompoſons encore ce mouvement du corps en deux autres; l'un ſuivant la verticale Mq, & l'autre ſuivant l'horizontale Mr; menant mp parallele à MP, on aura Mq $= mr = dy$, & M$r = dx$. La vîteſſe ſuivant la direction Mq ſera $= \frac{dy}{dt}$, & l'autre $= \frac{dx}{dt}$. Puiſque le mouvement imprimé au corps par la force de projection ſuivant EH, n'eſt changé que que par la gravité, dont l'action eſt dirigée ſuivant MP, il eſt clair que le mouvement ſuivant Mr n'eſt point altéré, & que dans cette direction la vîteſſe reſtant la même eſt toujours exprimée par $\sqrt{b}\, \mathit{coſ.}\, I$; d'où il ſuit que $\frac{dx}{dt} =$

$\sqrt{b\ cof.\ I}$, ou $dx = dt\sqrt{b\ cof.\ I}$, dont l'intégrale eſt $x = t\ cof.\ I\sqrt{b}$; ce qui prouve que le corps va toujours également vîte ſuivant la direction horizontale. Il n'en eſt pas de même de la direction verticale dans laquelle la gravité exerce continuellemeut toute ſon action ſur le mobile. Or dans cette direction la vîteſſe du mobile étant $= \frac{dy}{dt}$, la hauteur relative à cette vîteſſe ſera $\frac{dy^2}{dt^2}$, dont la différentielle, en ſuppoſant dt conſtant, eſt $= \frac{2dyddy}{dt^2}$. Cette différentielle doit être à l'eſpace dy, parcouru par ce mouvement dans l'inſtant dt, comme la force qui agit ſur le corps ſuivant la verticale M q, eſt à la peſanteur de ce corps. Mais cette force eſt égale à la peſanteur même du corps; il eſt ſeulement à obſerver que cette force ne tend point à augmenter la vîteſſe, mais à la diminuer. On a donc cette proportion $\frac{2dyddy}{dt^2} : dy :: -1 : 1$; ce qui donne $2ddy = -dt^2$, dont l'intégrale eſt $\frac{2dy}{dt} = C - t$; où $\frac{dy}{dt}$ exprime la vîteſſe verticale du corps à la fin du temps t. Or au commencement du mouvement, lorſque $t = 0$, la vîteſſe eſt $= \sqrt{b\ ſin.\ I}$; donc $C = 2\sqrt{b\ ſin.\ I}$; & $\frac{2dy}{dt} = 2\sqrt{b\ ſin.\ I} - t$; donc $2dy = 2dt\sqrt{b\ ſin.\ I} - tdt$, dont l'intégrale eſt $2y = 2t\sqrt{b\ ſin.\ I} - \frac{1}{2}tt$.

L'équation différentielle $\frac{2dy}{dt} = 2\sqrt{b\ ſin.\ I} - t$ fait voir en premier lieu que lorſque $t = 2\sqrt{b\ ſin.\ I}$, la vîteſſe verticale eſt nulle, & que le

le corps n'a plus que son mouvement horizontal; en supposant donc que cela arrive en A, la tangente de la courbe à ce point sera horizontale. En second lieu, si t est plus grand que $2\sqrt{b}\,\textit{sin.}\,I$, la vitesse verticale aura une valeur négative, ce qui indique qu'alors le corps descend. Ainsi EA est la portion de la courbe par où le corps monte, & AF celle par où il descend. Pour connoitre la nature de cette courbe, on observera que $t = \frac{x}{cos.\,I\sqrt{b}}$; substituant cette valeur dans l'équation $2y = 2t\,\textit{sin.}\,I\sqrt{b} - \frac{1}{2}tt$, on aura $2y = 2x\,\text{tang.}\,I - \frac{xx}{2b\,cos.\,I^2}$, ou $xx - 4bx\,\textit{sin.}\,I\,\textit{cos.}\,I = -4by\,\textit{cos.}\,I^2$, d'où l'on tire $-x + 2b\,\textit{sin.}\,I\,\textit{cos.}\,I = 2\,\textit{cos.}\,I\sqrt{(bb\,\textit{sin.}\,I^2 - by)}$. On voit clairement par cette équation, que la courbe EMF est une parabole; car si l'on prend $EB = 2b\,\textit{sin.}\,I\,\textit{cos.}\,I$, on aura $BP = 2b\,\textit{sin.}\,I\,\textit{cos.}\,I - x$; élevant ensuite en B la perpendiculaire $BA = b\,\textit{sin.}\,I$, & menant MQ parallele à EF, on aura $AQ = b\,\textit{sin.}\,I - y$; faisant donc $AQ = p$ & $QM = q$, on aura $q = 2\,\textit{cos.}\,I\sqrt{pb}$ & $qq = 4pb\,\textit{cos.}\,I^2$. Ce qui fait voir, 1°. que la courbe EMF est une parabole qui a pour axe la verticale AB; 2°. que le sommet A est également éloigné des extrémités E & F de l'horizontale EF; 3°. que les arcs EA, AF étant égaux & semblables, font en E & F des angles égaux avec l'horizontale. De plus, puisque $EF = 2\,EB = 4b\,\textit{sin.}\,I\,\textit{cos.}\,I$, la vîtesse verticale du corps en F sera $\sqrt{b}\,\textit{sin.}\,I - \frac{x}{2\sqrt{b}\,cos.\,I}$, mettant pour x sa valeur $4b\,\textit{sin.}\,I\,\textit{cos.}\,I$, cette vîtesse sera $= -\sqrt{b}\,\textit{sin.}\,I$, qui ne

Ee

differe de la vîtesse en E, qu'en ce que celle-ci est dirigée du bas en haut, au lieu que l'autre l'est de haut en bas; & comme il n'y a rien de changé dans le mouvement horizontal, il s'ensuit que la vîtesse du corps en F est la même qu'en E. D'ailleurs puisque EB = 2 *b sin.* I *cos.* I, on aura EB = *b sin.* 2 I, & l'amplitude EF = 2 *b sin.* 2 I; d'où l'on voit que la vitesse en E restant la même, les amplitudes sont comme les sinus du double des angles de projection HEF; & si l'angle HEF reste le même, les amplitudes seront proportionnelles au quarré des vîtesses. A l'égard de la plus grande amplitude, puisque EF = 2 *b sin.* 2 I, il est évident que l'amplitude sera la plus grande, lorsque 2 I sera un angle de 90 degrés, parce que le sinus de cet angle est le plus grand de tous les sinus; ainsi le mobile ira le plus loin qu'il est possible, lorsqu'il sera projeté suivant une direction qui fait un angle de 45 degrés avec l'horizon. Maintenant si l'on prend l'angle HEF de 45 degrés, on aura *sin.* 2 I = 1, l'amplitude sera donc alors = 2 *b*, c'est-à-dire, double de la hauteur *b*, relative à la vîtesse du corps projeté. On peut dans tous les cas trouver l'amplitude par une simple regle de trois, en disant: le sinus de 90 degrés est au sinus du double de l'angle HEB, que la premiere direction du corps projeté fait avec l'horizon, comme le double de la hauteur *b*, d'où le corps auroit dû tomber pour acquérir sa vîtesse, est à l'amplitude EF. Veut-on connoître AB, ou la plus grande hauteur que le mobile puisse atteindre dans sa course, puisqu'on a AB = *b sin.* I^2, on trouvera aisément cette hauteur par une regle de trois.

Il eſt donc vrai que, ſi la réſiſtance de l'air ne faiſoit aucun effet ſur les bombes & les boulets, la courbe décrite par ces corps ſeroit une parabole, & que leur mouvement ſuivroit les loix preſcrites par les théoremes que l'Auteur énonce dans cette Propoſition, & qui ſe trouvent ſuffiſamment démontrés par notre calcul. Nous aurions pu rendre cette théorie plus générale, en ſuppoſant que EF ne fût point une ligne horizontale, mais inclinée comme on voudra à l'horizon. Le calcul n'eût pas été beaucop plus compliqué, & l'on auroit vu que dans le cas de la plus grande diſtance, priſe ſur la ligne inclinée EF, l'angle GEF, formé par la verticale & cette inclinée, ſeroit diviſé en deux également par la direction EH. Mais comme cela n'eſt d'aucune utilité dans l'Artillerie, nous ne nous y arrêterons pas davantage pour paſſer à la Propoſition ſuivante.



PROPOSITION VI.

La courbe décrite dans l'air par une Bombe ou un Boulet, n'est point une parabole, elle n'en approche même pas, à moins que la vîtesse du corps projeté ne soit très-petite.

Nous avons vu, dans la Proposition IV de ce Chapitre, qu'une balle de mousquet tiré d'un canon de 45 pouces de longueur, avec une charge de poudre égale à la moitié de son poids, recevoit une vîtesse de 1700 pieds par seconde: or, si cette balle parcouroit une parabole, il faudroit par le cinquieme théoreme, qu'étant tirée sous l'angle de 45 degrés, son amplitude horizontale fût d'environ 17 milles d'Angleterre. Cependant tous les Praticiens assurent que la portée d'un pareil coup ne va pas au-delà d'un demi-mille. Diego Ufano dit que la plus grande portée d'un fusil de 4 pieds de longueur, chargé d'une balle de plomb d'une once & demie, ce qui s'accorde à peu près avec notre exemple, ne s'étend pas à plus de 797 pas ordinaires, l'angle de la projection étant de 40 à 50 degrés, & la charge de la meilleure poudre égale au poids de la balle. Le P. Mersenne nous apprend qu'ayant tiré un fusil sous l'angle de 45 degrés, la portée fut de moins de 400 toises ou 800 yards. Donc puisque toutes ces portées ne sont pas d'un mille d'Angleterre, il s'ensuit qu'une balle tirée avec la plus forte charge, sous l'angle de 45 degrés, ne va pas à la trente-quatrieme partie

de la portée qui résulteroit du mouvement parabolique.

Cette diminution de la portée d'une balle de fusil doit paroître d'autant moins surprenante, que la résistance qu'elle rencontre dans l'air est environ 120 fois plus grande que son propre poids, ainsi qu'on l'a démontré dans la Proposition II. de ce Chapitre.

On dira peut-être que cette déviation d'une balle de la courbe parabolique ne prouve pas qu'il en soit de même à l'égard des bombes & des boulets, ces corps, à cause de leur plus grande pesanteur, rencontrant beaucoup moins de résistance en traversant l'air. Pour répondre à cette objection, nous prendrons pour exemple le boulet de 24 comme le plus pesant de ceux qu'on emploie sur terre. Ce boulet tiré aux deux tiers de sa pesanteur, reçoit une vîtesse de 1650 pieds par seconde; que l'on cherche donc la plus grande amplitude relativement à cette vîtesse, on trouvera, par le cinquieme théoreme, que le boulet partant sous l'angle de 45 degrés, sera porté à plus de 16 milles d'Angleterre, c'est-à-dire à une distance cinq à six fois plus grande que la portée réelle; car tous les Praticiens conviennent que la plus grande portée ne s'étend point au-delà de trois milles. Les épreuves de M. Dumetz, rapportées dans les Mémoires d'Artillerie de St. Remy, prouvent que la portée d'une piece de 24, pointée à 45 degrés, étoit de 2250 toises, distance moindre que trois milles de 222 toises. Donc la portée de ces pieces n'est qu'environ la cinquieme partie de celle qui résulte du mouvement parabolique.

Il n'eſt pas néceſſaire que le mobile ait une auſſi grande vîteſſe, pour que la courbe qu'il parcourt s'écarte autant de la parabole : cet écart a lieu, même lorſque les corps ſe meuvent aſſez lentement pour qu'on puiſſe les appercevoir dans leur courſe. Il y a très-peu de ces mouvemens, que l'on peut juger à l'œil, qui s'accordent avec les théoremes 1, 2 & 3 ; car il eſt aiſé de voir que la branche deſcendante de la courbe parcourue eſt plus courte, & fait avec l'horizon un angle plus grand que la branche aſcendante ; on voit auſſi que le point le plus élevé de cette courbe eſt plus éloigné du point de départ que du point de chûte. C'eſt de quoi l'on peut ſe convaincre, en examinant d'un endroit convenable le mouvement d'une pierre, d'une fleche ou d'une bombe.

L'expérience m'a auſſi appris qu'on riſquoit beaucoup de ſe tromper en ſe ſervant des théoremes 5, 6 & 7, pour conclure la portée de l'angle de projection, quoiqu'avec une petite vîteſſe : j'ai tiré une balle de plomb de $\frac{3}{4}$ de pouce de diametre, la vîteſſe étant de 400 pieds par ſeconde, & ſous un angle de 19° 5′ ; la portée ſur un terrein uni & horizontal fut de 448 yards, tandis que par le 5ᵉ. théoreme, elle auroit dû être de 1700 yards ; la portée réelle n'a donc été que les $\frac{2}{7}$ environ de ce qui ſeroit réſulté de la théorie ordinaire.

La même balle tirée avec la même vîteſſe ſous l'angle de 9° 45′ a été portée à 330 yards, au lieu de 566 que l'on trouve par le 5ᵉ. théoreme ; mais ſi l'on vouloit trouver cette portée par le 6ᵉ. théoreme, & la conclure de l'expérience précédente, on ne trouveroit que 241

yards ; or ces deux nombres font bien différens de 330.

Une autre balle de même diametre ayant été tirée fous l'angle de 8°, avec une viteffe de 700 pieds par feconde, la portée fut de 690 yards ; au lieu que cette portée déduite de la premiere vîteffe par le 6e. théoreme, eût été de 1400 yards, plus que double de la portée réelle.

Enfin, une balle tirée fous l'angle de quatre degrés, avec la même vîteffe que dans la derniere expérience, fut portée à 600 yards : or cette portée n'eût été que de 350 yards, en conféquence de l'épreuve précédente & du 6e. théoreme. Ce qui ne laiffe aucun doute fur la fauffeté de ces théoremes, & fait voir que la courbe décrite par les projectiles, même les plus pefans, n'eft point une parabole, & n'en approche même pas, à moins que leur vîteffe ne foit très-petite. Mon deffein étant d'examiner plus particuliérement la nature de cette courbe, pour donner une idée des difficultés que cette recherche entraîne avec foi, je finirai cette Propofition par quelques obfervations fur une circonftance affez bizarre qui s'y rencontre trèsfouvent.

Puifque la pefanteur agit fur les corps fuivant une direction perpendiculaire à l'horizon, il eft évident que fi nulle autre force n'agiffoit fur un corps projeté, fon mouvement s'exécuteroit dans un plan vertical paffant par fa premiere direction. Cependant j'ai trouvé que le mobile s'écartoit fouvent de ce plan, tantôt à droite, tantôt à gauche, en fuivant une ligne courbe qui tourne fa convexité vers ce plan vertical ; de maniere qu'un corps projeté fe meut fouvent

dans une courbe à double courbure, dont l'une eſt occaſionnée par l'action de la peſanteur, & l'autre par une force qui éloigne le mobile d'un côté ou de l'autre du plan vertical. Dans ce cas, le corps ne ſe meut point dans un plan, mais dans la ſurface courbe d'une ſorte de cylindre dont l'axe eſt vertical. C'eſt ce que nous allons confirmer par des expériences dans la Propoſition ſuivante.

PREMIERE REMARQUE.

L'Auteur nous promet ici un autre Ouvrage dans lequel il ſe propoſe de déterminer la vraie courbe décrite dans l'air par un boulet de canon; mais rien, que je ſache, n'a encore paru ſur ce ſujet, quoiqu'annoncé depuis pluſieurs années. Il eſt vrai que cette recherche préſente de grandes difficultés, qui ont pu obliger l'Auteur à y employer un temps plus conſidérable. Quoi qu'il en ſoit, nous allons traiter le même ſujet, en partant de ce que l'expérience nous apprend ſur les effets de la réſiſtance de l'air, dans l'eſpérance que notre travail ne différera pas beaucoup de celui que l'Auteur a promis. Mais il ſera abſolument néceſſaire que nous faſſions abſtraction de la circonſtance dont l'Auteur vient de parler, touchant la déviation du mobile, tantôt à droite, tantôt à gauche du plan vertical, attendu que cette déviation, comme il ſera prouvé dans la ſuite, n'eſt qu'un effet de la forme irréguliere de la bombe ou du boulet. Nous ſuppoſerons donc que le corps projeté eſt parfaitement ſphérique, que ſon centre de gravité ſe confond avec le centre de

figure, & qu'il n'a aucun mouvement particulier autour de son centre. Ces diverses circonstances, si l'on vouloit les considérer, non-seulement rendroient cette recherche très-difficile & presqu'impossible, mais nous pensons même qu'il n'en résulteroit aucune utilité, parce qu'on ne peut ni connoître, ni prévoir toutes les irrégularités du mouvement d'un corps, qui proviennent de la figure & de la contexture de ses parties. En supposant donc un corps parfaitement sphérique & d'une matiere homogene, il est clair qu'il se mouvra nécessairement dans un plan vertical.

Afin qu'on puisse retirer quelques avantages de nos recherches dans la pratique de l'Artillerie, il est à propos d'en faire le sujet de trois articles : nous examinerons d'abord le mouvement d'un corps projeté horizontalement, dans le cas où la courbure de la trajectoire n'est pas bien sensible ; la diminution de sa vîtesse & son abaissement au dessous de la ligne horizontale.

Le mouvement d'un corps lancé verticalement sera le sujet d'un second article, dans lequel nous examinerons l'ascension & la descente du corps.

Dans le troisieme nous considérerons les corps projetés obliquement, ou suivant une direction inclinée à l'horizon, nous tâcherons de déterminer la nature & l'amplitude de la courbe qu'ils décrivent. Les expériences de l'Auteur serviront à confirmer notre théorie.

Soit donc un boulet projeté suivant la direction horizontale EF (fig. 24) ; quoiqu'il s'abaisse continuellement au dessous de cette direction, néanmoins cet abaissement est si peu de chose,

même à une assez grande distance, que la courbure de la ligne parcourue est à peine sensible dans cette étendue; & comme l'opinion commune étoit que le boulet parcourt d'abord une ligne EF sensiblement droite, on a nommé cette distance, *portée de but en blanc*, parce que le boulet doit y frapper le point auquel le canon est dirigé: mais puisque le boulet s'abaisse en effet aussi-tôt qu'il est sorti du canon, on peut regarder comme portée de but en blanc toute distance au bout de laquelle l'abaissement FG, ou plutôt l'angle FEG commence à devenir sensible dans la pratique. Ainsi, tant que cet angle sera très-petit, on pourra, sans erreur, faire abstraction de la courbure de la ligne EG. Nous pouvons donc imaginer que le boulet se meut dans une ligne droite, sauf à déterminer la quantité de son abaissement à chaque point P de son chemin; ce qui est très-facile, lorsqu'on connoît le temps employé à parcourir EP, ou à s'abaisser de la quantité PM en vertu de la pesanteur, cet abaissement de 15,625 pieds de Rhin en une seconde.

Soit donc b la hauteur dont un corps devroit tomber pour acquérir la vîtesse initiale du boulet; c, son diametre; & sa matiere n fois plus pesante que l'air. Supposons qu'après le temps t, le boulet soit arrivé en M ou P; EP $= x$; PM $= y$, & la vîtesse du boulet $= \sqrt{v}$. Puisque PM est la hauteur d'où le boulet est tombé dans le temps t, on aura $y = \frac{tt}{4}$ (35). Mais

(35) Dans cette équation, y est supposé réduit en milliemes du pied de Rhin, & sa racine quarrée divisée par 125, comme M. Euler le pratique, pour avoir le

pour déterminer le mouvement ſuivant l'horizontale EP, il eſt à remarquer que la réſiſtance en P eſt exprimée par le poids d'une colonne d'air, dont la hauteur eſt $\frac{1}{2} v + \frac{vv}{2h}$, où h vaut 28845 pieds anglois, ou 27979 pieds de Rhin. Le poids du boulet étant égal à celui d'une colonne d'air d'une hauteur $= \frac{2}{3} nc$, la force de la réſiſtance ſera au poids du boulet, comme $\frac{3v(h+v)}{4nch}$ eſt à 1. Ainſi, pendant que le boulet parcourt $Pp = dx$, on a $dv = \frac{-3v(h+v)dx}{4nch}$, & $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}}$; d'où l'on tire auſſi $dt = \frac{-4nchdv}{3v(h+v)\sqrt{v}}$. La premiere équation peut être miſe ſous cette forme : $dx = \frac{-4nc}{3}\left(\frac{dv}{v} - \frac{dv}{h+v}\right)$; dont l'intégrale eſt $x = \frac{4nc}{3}\ l\ \frac{b(h+v)}{v(b+h)}$.

Maintenant, ſi, pour abréger, on fait $\frac{3x}{4nc} = z$, & qu'on prenne e pour le nombre dont le logarithme hyperbolique eſt l'unité, on aura $e^z = \frac{b(h+v)}{v(b+h)}$, & $v = \frac{bh}{e^z(b+h)-b}$.

L'autre équation $dt = \frac{-4nchdv}{3v(h+v)\sqrt{v}}$, ſe change en celle-ci : $dt = \frac{-3nc}{3} \times \frac{hdv}{(h+v)v\sqrt{v}}$. Pour

temps en ſecondes, ou par 250, pour avoir la moitié de ce temps : car il eſt clair que $\frac{\sqrt{1000y}}{250} = \frac{t}{2}$ donne $\frac{1000y}{62500} = \frac{tt}{4}$ & $y = 15{,}625\ tt$, qui eſt effectivement l'eſpace y en pieds de Rhin exprimé par le temps en ſecondes, puiſqu'un corps, dans la premiere ſeconde de ſa chûte, parcourt 15,625 pieds de Rhin.

rendre cette équation rationnelle, soit $h = aa$ & $v = uu$, on aura $dt = \frac{-4nc}{3} \times \frac{2aadu}{uu(aa+uu)} = \frac{8nc}{3}\left(\frac{du}{aa+uu} - \frac{du}{uu}\right)$, dont l'intégrale dépend en partie de la quadrature du cercle : car $\int \frac{adu}{aa+uu} =$ A tang. $\frac{u}{a}$, c'est-à-dire, à un arc de cercle dont la tangente $= \frac{u}{a}$, le rayon étant $= 1$. On a donc $t = \frac{8nc}{3}\left(\frac{1}{a}\right.$ A tang. $\left.\frac{u}{a} + \frac{1}{u} - C\right)$; remettant $\sqrt{h}$ pour a, $\sqrt{v}$ pour u, & déterminant la constante C de maniere que l'on ait $v = b$, lorsque $t = 0$, on aura $t = \frac{8nc}{3}\left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{v}}{\sqrt{bv}} - \frac{1}{\sqrt{h}}\right.$ A tang. $\left.\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{v})\sqrt{h}}{h+\sqrt{bv}}\right)$.

La hauteur v ayant donc été déterminée par la valeur de l'espace parcouru x, le temps t pourra aussi se déduire du même espace, & par conséquent y qui est $= \frac{tt}{4}$; ce qui donnera l'angle PEM, après avoir tiré la ligne EM.

Mais comme nous supposons que l'abaissement PM n'est pas encore bien sensible, on pourra se servir avec avantage des approximations : car la fraction $\frac{3x}{4nc} = z$ ayant, dans ce cas, une très-petite valeur, on aura, à peu de chose près, $e^z = 1 + z = 1 + \frac{3x}{4nc}$; donc $v = b - \frac{b(b+h)z}{h}$, & $\sqrt{v} = \sqrt{b} - \frac{(b+h)z\sqrt{b}}{2h}$; par conséquent, $t = \frac{8nc}{3}\left(\frac{(b+h)z}{2h\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right.$ A tang. $\left.\frac{z\sqrt{b}}{2\sqrt{h}}\right)$; & comme z a une très-petite

valeur, on aura A tang. $\frac{z\sqrt{b}}{2\sqrt{h}} = \frac{z\sqrt{b}}{2\sqrt{h}}$, donc $t = \frac{4ncz}{3\sqrt{b}} = \frac{x}{\sqrt{b}}$. Mais cette expression ne convient qu'à un mouvement parfaitement uniforme ; & comme le mouvement dont il s'agit ici ne peut point passer pour uniforme, il faudra pousser l'approximation plus loin. Soit donc $e^z = 1 + z + \frac{1}{2}zz$, on aura $v = b - \frac{b(b+h)}{h}\left(z - \frac{1}{2}zz - \frac{bzz}{h}\right)$, & $\frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{(b+h)z}{2h\sqrt{b}} + \frac{(b+h)(h-b)zz}{8hh\sqrt{b}}$; or, $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}}$ & $z = \frac{3x}{4nc}$ dont $t = \frac{x}{\sqrt{b}} + \frac{3(b+h)xx}{16nch\sqrt{b}} + \frac{3(hh-bb)x^3}{128nncchh\sqrt{b}}$: d'où l'on connoîtra le temps employé à parcourir EP $= x$, & l'abaissement PM $= \frac{tt}{4} = \frac{xx}{4b} + \frac{3(b+h)x^3}{32ncbh}$. On aura donc l'angle PEM, dont la tangente est $= \frac{x}{4b} + \frac{3(b+h)xx}{32ncbh}$.

La vitesse du boulet en P, sera déterminée par cette équation : $v = b - \frac{3b(b+h)x}{4nch} + \frac{9b(b+h)(2b+h)xx}{32nchh}$, ou par cette proportion : $\sqrt{b} : \sqrt{v} :: 1 + \frac{3(b+h)x}{8nch} + \frac{9(hh-bb)xx}{128n^2c^2h^2} : 1$.

La tangente de l'angle PEM étant, à peu près, $= \frac{x}{4b}$, on en déduira la distance EF, où l'angle FEG est d'une grandeur donnée. Supposons que cet angle FEG soit d'un demi-degré, on aura $\frac{x}{4b} = 0{,}0087269$, donc EF $= \frac{8b}{229}$, à peu près. Il faudra même prendre cette

distance EF un peu moindre que $\frac{8b}{229}$; parce que l'angle FEG sera d'un peu plus qu'un demi-degré : & si l'on veut que cet angle soit d'un demi-degré pour un boulet de 24 dont la vîtesse initiale est de 1500 pieds par seconde, il faut que EF soit à peu près $= \frac{b}{40} = 900$ pieds. Ainsi pour atteindre un point G éloigné du canon de 900 pieds, il faut que l'axe de la piece soit dirigé vers un point F, de maniere que l'angle FEG soit d'un $\frac{1}{2}$ degré. Les mêmes formules peuvent aussi servir, lorsqu'on connoîtra la vîtesse du boulet, son diametre & sa pesanteur relativement à celle de l'air, à trouver l'angle FEG sous lequel on doit tirer, pour atteindre un point G éloigné comme on voudra du point E, & à déterminer la vîtesse du boulet en G, par la connoissance de l'angle FEG, pourvu toutefois que cette distance ne soit pas trop grande, & qu'on puisse faire abstraction de la courbure de la ligne décrite par le boulet.

Supposons, par exemple, que le diametre du boulet soit de 5 $\frac{1}{2}$ pouces, ou $\frac{11}{24}$ de pied anglois; que ce boulet soit de fer, ou $n = 6647$, & que sa vîtesse initiale soit de 1650 pieds anglois ou de 1600 pieds de Rhin, on aura $b = 40960$ pieds de Rhin; & comme $c = \frac{11}{24}$ pieds anglois $= 0,44458$ pieds de Rhin, on aura $\frac{4nc}{3} = 3940$; on a aussi $h = 27979$ pieds de Rhin.

Soit de plus la distance EF de 1000 pieds de Rhin, on aura $x = 1000$, & $z = \frac{3x}{4nc} = \frac{100}{394}$; d'où l'on voit que la valeur de z est assez petite pour qu'on puisse s'en tenir à l'approximation que

nous avons employée ci-dessus. Et comme, lorsque la vîtesse en G est représentée par $\sqrt{v}$, on a cette proportion : $\sqrt{b} : \sqrt{v} :: 1 + \frac{(b+h)\zeta}{2h} + \frac{(b+h)(h-b)\zeta\zeta}{8hh} : 1$; on aura $\sqrt{b} : \sqrt{v} ::$ 1,30348 : 1 ; donc la vîtesse du boulet en G est de 1227 pieds par seconde. D'un autre côté, la tangente de l'angle FEG est $= \frac{x}{4b} - \frac{(b+h)x\zeta}{8bh} = \frac{x}{4b}\left(1 + \frac{(b+h)\zeta}{2h}\right)$; ou, en nombre $=$ $1,31268 \times \frac{x}{4b} = 0,008012$, qui est la tangente de 27′ 32″. Ainsi, dans cet exemple, l'angle de l'abaissement n'est que de 27′ 32″, quoique la distance EF soit de 1000 pieds, & que la vîtesse du boulet soit sensiblement diminuée. Quand on voudra donc atteindre avec ce boulet un point G éloigné du canon de 1000 pieds, il faudra diriger l'axe de la piece sur un point F plus élevé, de maniere que l'angle FEG soit de 27′ 32″ : on pourroit, à cet effet, faire sur le canon une marque telle que la ligne de mire qu'elle détermineroit, fît avec l'axe un angle de 27′ 32″. Si la distance est double de ce qu'on vient de la supposer, on pointera sous un angle aussi double, à peu près : mais pour de moindres distances, on tirera assez juste en diminuant l'angle dans le même rapport que la distance. Par exemple, pour une distance de 500 pieds, l'angle d'abaissement sera de 13′ 46″; pour 250 pieds, il sera de 6′ 53″. En général, il est aisé de voir que si la distance EF n'étoit pas beaucoup plus grande que 1000 pieds, l'angle FEG n'iroit pas seulement à un demi-degré.

Donc, puiſque dans la pratique ordinaire du tir des pieces de canon, on ne tient pas compte d'auſſi petits angles, il ne faut pas chercher plus loin pourquoi on a cru qu'un boulet de canon parcouroit une ligne droite dans une aſſez grande étendue de ſa courſe.

Telle eſt donc la courbure de la ligne que parcourt un boulet projeté horizontalement : elle ſera encore moindre, lorſqu'il ſera projeté obliquement, parce qu'alors il n'y a qu'une partie de ſa peſanteur qui contribue à cette courbure, au lieu que dans la projection horizontale, la peſanteur entiere y eſt employée. Cette diminution ſuit à peu près le rapport des coſinus des angles de projection ; & quand le boulet eſt dirigé verticalement, il parcourt une ligne droite : c'eſt ce que nous allons examiner dans la Remarque ſuivante (36).

---

(36) Puiſque nous avons à préſent un moyen de calculer le temps qu'un boulet met à parcourir un eſpace donné, la réſiſtance de l'air étant exprimée par $\frac{1}{2} v + \frac{vv}{2h}$, nous pouvons entrer dans quelques détails ſur le tir du canon, & comparer plus exactement qu'on ne l'a fait juſqu'à préſent, les réſultats de la théorie avec ceux de l'expérience. Commençons d'abord par rendre la formule du temps ſuſceptible d'un calcul plus ſimple : M. Euler trouve dans cette Remarque le temps $t = \frac{8nc}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{h}} \text{ A tang. } \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{h}} + \frac{1}{\sqrt{h}} \right) + C$; la conſtante C ſe détermine par la condition que $\sqrt{v} = \sqrt{b}$, lorſque $t = 0$; ce qui donne $0 = \frac{8nc}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{h}} \text{ A tang. } \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{h}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right) + C$, donc $C = \frac{-8nc}{3} \Big(\frac{1}{\sqrt{h}}$ A tang.

$$\text{A tang.}\ \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{h}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\Big), \&\ t = \frac{S n e}{3}\left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{v}}{\sqrt{bv}} - \frac{\left(\text{A tang.}\ \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{h}} - \text{A tang.}\ \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{h}}\right)}{\sqrt{h}}\right).$$

Voici maintenant l'ordre qu'on pourra suivre pour trouver le temps, par le moyen de cette formule. On remarquera d'abord qu'il s'agit de trouver la différence de deux arcs de cercle, dont l'un a pour tangente $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{h}}$, & l'autre $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{h}}$, le sinus total étant $= 1$; qu'il faut diviser cette différence par $\sqrt{h}$, & retrancher le quotient de $\frac{\sqrt{b}-\sqrt{v}}{\sqrt{bv}}$. Un arc de cercle étant exprimé par le nombre des minutes qu'il contient, on en aura la longueur absolue par cette proportion : 21600, nombre des minutes contenues dans la circonférence, est à la longueur de cette circonférence, en supposant le rayon $= 1$, comme le nombre des minutes contenues dans cet arc, est à sa longueur. On aura donc cette longueur, en multipliant le nombre des minutes de l'arc par un nombre dont le logarithme est 6,4637261, duquel ôtant le logarithme de $\sqrt{h}$, on aura 3,3600903, qu'il faut ajouter au logarithme de la différence des deux arcs, pour avoir le logarithme de $\frac{\text{A tang.}\ \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{h}} - \text{A tang.}\ \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{h}}}{\sqrt{h}}$, que nous représenterons par $l\text{D}$ dans les calculs suivans; & le logarithme 3,3600903 par $l\text{N}$.

On voit aussi que, pour avoir le temps, il faut connoître la vîtesse restante $\sqrt{v}$, & la vîtesse perdue $\sqrt{b} - \sqrt{v}$. Commençons donc par le calcul de la vîtesse restante, en employant la formule dont nous avons donné un exemple, dans la note qui est à la suite de la seconde Remarque de la Proposition III.

Nous chercherons ici quelle est la vîtesse qu'un boulet de 24 conserve encore après avoir parcouru 1446 pieds, la charge étant de 8 livres de poudre, & par conséquent la vitesse initiale de 1319 pieds par seconde, suivant la Table des vitesses.

OPÉRATION.

$l\,\frac{3}{4nc}$	6,4336287	$b = 28804$
$l\,x = 1446$	3,1601683	$h = 26683$
l 0,43429448	9,6377843	$b + h = 55487$
$l\,\frac{3x}{4nc} \times$ 0,43429 &c.	9,2315813	lb . . . 4,4594527
dont le nombre = .	0,1704439	$l(b+h)$ 4,7441912
ôtez $l\,\frac{b}{b+h}$ . . .	9,7152615	$l\,\frac{b}{b+h}$ 9,7152615
reste lm	0,4551824	
comp. $l\,(m-1)$ . .	9,7323084	
lh	4,4262347	
l 60,4	1,7810369	
	5,9395800	
$l\,\sqrt{v}$	2,9697900 = l. 932,8.	

La vitesse restante, au bout de 1446 pieds, est donc de 932,8 pieds par seconde, & par conséquent la vitesse perdue $\sqrt{b} - \sqrt{v} = 386{,}2$ pieds.

Cherchons maintenant le temps employé à parcourir ces 1446 pieds.

OPÉRATION.

comp. $l\,\sqrt{h}$ . . .	6,8963642	
$l\,\sqrt{b}$ . . .	3,1202448	
$l\,\sqrt{v}$ . . .	2,9697900	
$l(\sqrt{b}-\sqrt{v})$	2,5868123	
$l\,\sqrt{bv}$ . .	6,0900348	
$l\,\frac{\sqrt{b}-\sqrt{v}}{\sqrt{bv}}$	6,4967775	 0,00031389

$l\,\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{h}}$ . . 10,0166090 tang. 2765',7

$l\,\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{h}}$ . . 9,8661542 tang. 2178,5

2,7687860 diff. 587,2

lN 3,3600903

lD 6,1288763 0,00013455

$l\left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{r}}{\sqrt{br}}-D\right)$ 6,2536772 0,00017934

$l\,\frac{8nc}{3}$ . . 3,8674013

lt . . . . . 0,1210785 = l 1,322.

Le temps du trajet est donc de 1",322. Voyons maintenant ce que donne l'expérience.

On a cru jusqu'à présent qu'il n'y avoit aucune utilité à retirer des portées, pour connoître le temps qu'un boulet met à parcourir un espace donné, & les autres élémens de la théorie du mouvement des projectiles. M. Robins rejette les portées comme sujettes à trop d'incertitude, & il a bien raison, puisque la même charge & la même direction de la piece donnent souvent des portées très-inégales : mais si l'on fait attention que cette inégalité ne vient que de la variété des angles sous lesquels le boulet sort du canon, & de la situation du point où il touche terre à sa premiere chûte, on conviendra que la connoissance des portées, si elle est accompagnée de celle de l'angle de départ & de la position du point de chûte, fournira toutes les lumieres qu'on peut desirer. Voici comment je m'y suis pris pour connoître l'angle de départ du boulet : à cinq toises de la bouche du canon, & dans sa direction, j'ai fait planter verticalement une regle de sapin, de 3 pouces de largeur & de 4 à 5 lignes d'épaisseur ; la piece étoit pointée horizontalement ; & comme à la distance de cinq toises, le boulet ne s'est point encore sensiblement abaissé par sa pesanteur, il est clair que s'il suit la direction de la piece, le point où il frappe la regle doit être parfaitement de niveau avec la bouche du canon. Mais si, par un choc contre la partie

inférieure ou supérieure de la bouche du canon, le boulet s'éleve ou s'abaisse en sortant de la piece, le point frappé de la regle sera au dessus ou au dessous du niveau de la ligne horizontale qui passe par la bouche du canon. Ainsi en mesurant par le nivellement la quantité dont le point frappé est plus haut ou plus bas que cette ligne, on aura tout ce qui est nécessaire pour connoître l'angle du départ : car en prenant la distance de 5 toises, ou 360 pouces pour rayon ou sinus total, cette quantité sera la tangente de l'angle en question. La ligne horizontale que j'ai considérée, est celle qui passe par le bas de la bouche du canon, parce que c'est le bas du boulet dont on voit l'empreinte sur la partie inférieure de la regle qui reste en place, le haut est enleve & jeté au loin. Je me suis plusieurs fois assuré que cette empreinte est exactement une portion de la circonférence du boulet, qui, quand il rencontre la regle par le milieu de sa largeur, emporte une piece précisément de la hauteur de son diametre. A l'égard du point de chûte, la connoissance de sa position par rapport à la bouche du canon, n'est pas moins importante que celle de l'angle du départ; & il est aisé de s'en assurer, par le moyen du nivellement.

Ces choses étant connues, il ne sera pas difficile de savoir quelle est la hauteur dont un boulet s'est abaissé, à une distance donnée, au dessous de sa premiere direction : cette hauteur est composée de deux parties, dont l'une est la différence de niveau entre la bouche du canon & le point de chûte; & l'autre se trouve par l'angle de départ du boulet. Et comme cet abaissement n'a d'autre cause que la pesanteur, on trouvera le temps, qui est le même que celui du trajet.

Parmi un grand nombre d'épreuves que j'ai faites de cette maniere, je prendrai celles de la piece de 24, pour servir d'exemple. Cette piece étant pointée horizontalement, j'ai tiré avec différentes charges, depuis une livre jusqu'à huit livres de poudre. La charge étoit mise dans une gargousse de papier, pressée seulement dans le fond de l'ame, sans être refoulée; le boulet immédiatement sur la charge, le bouchon pardessus, & refoulé d'un seul coup. La Table suivante présente les résultats de ces épreuves.

CHARGES.	Angles du départ.	Portées horizontales.	Abaissemens du boulet au dessous du canon.	Abaissemens du boulet au dessous de sa direction.	Temps employé à tomber de cette hauteur.
liv.		pi.	pi.	pi.	
1	5′ 34″	374	6,2805	6,8866	0″,675
1 ½	13′ 8″	449	4,8542	6,5691	0,660
2	4′ 46″	483	4,7708	5,4415	0,600
2 ½	16′ 43″	579	3,6666	6,4812	0,656
3	11′ 56″	615	4,1597	6,2951	0,646
3 ½	22′ 17″	978	8,0903	14,4292	0,978
4	38′ 12″	1302	8,4650	22,9310	1,233
6	19′ 6″	1138	8,4097	14,7319	0,988
8	27′ 27″	1446	8,5208	20,0690	1,153

Comme, dans ces épreuves, le chemin du boulet differe très-peu de la ligne droite, il faut que les temps des abaissemens soient égaux chacun à chacun aux temps que le boulet met à faire son trajet, jusqu'au point de chûte, c'est-à-dire, que les vitesses initiales du boulet doivent être telles pour chaque charge, qu'elles lui fassent parcourir les portées horizontales de la troisieme colonne de cette Table, dans le même temps que la pesanteur l'abaisse des quantités comprises dans la cinquieme colonne. Voyons donc ce que donnent, pour le temps du trajet, les vitesses résultantes de la formule $v = \frac{1000\,b\,h}{k + 425\,b}$ $l\,\frac{2a-b}{b}$, qu'on trouve dans la Table des vitesses, pag. 402. En opérant comme dans l'exemple qu'on vient de calculer, on trouve les résultats suivans.

CHARGES.	Vîteſſes de la formule.	Portées hori-zontales.	TEMPS de la théorie.	TEMPS de l'expér.	VITESSES déduites de l'expér.
liv. 1	pi. 640	pi. 374	0″,604	0″,675	pi. 570
1 $\frac{1}{2}$	750	449	0,478	0,660	700
2	836	483	0,604	0,600	840
2 $\frac{1}{2}$	908	579	0,670	0,656	940
3	969	615	0,663	0,646	1020
3 $\frac{1}{2}$	1022	978	1,064	0,978	1090
4	1069	1302	1,406	1,233	1245
6	1215	1138	1,077	0,988	1340
8	1319	1446	1,322	1,153	1560

On voit par ces réſultats, que, pour les charges de 1, & 1 $\frac{1}{2}$ livres, la formule donne des vîteſſes initiales trop grandes; qu'elle s'accorde avec l'expérience pour la charge de 2 livres, & qu'elle donne des vîteſſes trop petites pour toutes les autres charges au deſſus de 2 livres, avec des différences qui augmentent à meſure que les charges ſont plus fortes. Ceci me confirme dans le jugement que j'ai déjà porté de la théorie de la poudre établie par l'Auteur, laquelle, quoique rectifiée à pluſieurs égards par M. Euler, donne encore des vîteſſes initiales trop petites; ce qui vient ſans doute de ce que le nombre 1000, employé dans la formule pour exprimer le rapport de la force de la poudre à la preſſion de l'athmoſphere, eſt trop petit. Mais comme cette formule donne auſſi quelquefois des vîteſſes trop grandes, quelque ſoit le nombre qu'on voulût choiſir pour exprimer, dans une hypotheſe quelconque, la force de la poudre, il ſera toujours démenti par l'expérience, dans une infinité de circonſtances. En effet, ce ſeroit avoir une idée bien

fausse de la nature de la poudre & de sa maniere d'agir, que de prétendre asservir un tel agent à suivre exactement, dans tous les cas, la regle prescrite par une formule. La force de la poudre varie, non-seulement d'un calibre à l'autre, à raison des différentes pesanteurs du boulet, elle varie aussi dans le même calibre, à raison de la chaleur qui accompagne l'inflammation, & qui, ayant plus d'intensité dans les grandes charges que dans les petites, rend celles-ci plus foibles, à proportion, que les autres. D'un autre côté, l'inflammation étant successive, elle est moins complete dans les grandes charges, avant le départ du boulet, que dans les petites, d'où résulte une sorte de compensation, mais non pas suffisante pour rétablir l'égalité. L'inflammation est aussi moins complette, même dans des charges égales, lorsque le mobile est moins pesant, & moins capable, par cette raison, d'opposer une résistance sensible & durable à l'expansion de la poudre. Il arrive de là que, quoique la même charge dût, suivant la théorie, imprimer plus de vitesse à un boulet de fer, qu'à un boulet de plomb de même diametre, nous voyons cependant que celui-ci va plus loin, quand la charge est un peu forte. Toutes ces considérations, qu'il n'est guere possible de faire entrer dans le calcul, empêcheront toujours qu'on ne puisse établir sur la poudre une théorie qui s'accorde avec l'expérience.

L'utilité qu'on peut retirer de la connoissance des vîtesses initiales dans la pratique du tir du canon, consiste en ce que, si avec une charge donnée on veut atteindre un but dont la distance est connue, on cherchera, en conséquence de la vitesse initiale résultante de cette charge, le temps que le boulet doit mettre à faire le trajet jusqu'au but; on cherchera aussi la hauteur dont le boulet devroit tomber dans le même temps : prenant ensuite la distance pour sinus total, & cette hauteur pour tangente, on trouvera un angle, qui est celui que la ligne de mire dirigée sur le but doit former avec l'axe du canon. Et si cet angle est égal à celui que la ligne de mire naturelle de la piece fait avec son axe, la distance du but sera la portée de but en blanc de cette piece avec la charge donnée.

Digitized by Google

SECONDE REMARQUE.

Soit, comme dans la Remarque précédente, le diametre du boulet $= c$, sa pesanteur n fois plus grande que celle de l'air, & $\sqrt{b}$ la vitesse avec laquelle il est projeté suivant la direction verticale EA (fig. 25). Nous supposerons qu'après le temps t le boulet est arrivé en P, & que sa vîtesse, après avoir parcouru $EP = x$, est $= \sqrt{v}$; l'élément Pp étant dx, on a $dt = \frac{-dx}{\sqrt{v}}$, & pendant que le boulet monte de P en p, son mouvement est ralenti par la pesanteur, & par la résistance de l'air; & il faut de plus que sa pesanteur absolue soit diminuée d'une quantité $\frac{1}{n}$, parce qu'un corps perd dans l'air une partie de son poids égal au poids du volume d'air qu'il déplace; l'action de la pesanteur sur le boulet sera donc exprimée par $1 - \frac{1}{n}$, que nous ferons $= g$ pour abréger. D'ailleurs, la résistance de l'air est comme on l'a vu, $= \frac{3v(h+v)}{4nch}$; on aura donc cette équation : $dv = - gdx - \frac{3v(h+v)dx}{4nch}$, & $dx = \frac{-4nchdv}{4ngch+3hv+3vv}$, dont l'intégrale dépend de la quadrature du cercle, ou des logarithmes, ou peut même être exprimée algébriquement : car si $h < \frac{16}{3} ngc$, ou $h < \frac{16}{3} (n-1)c$, l'intégration dépend de la quadrature du cercle, si $h > \frac{16}{3} (n-1)c$, elle dépend des logarithmes; enfin, l'intégrale pourra être exprimée algébriquement, si $h = \frac{16}{3} (n-1)c$. Ce dernier cas a lieu lorsque le boulet est de fer, &

ſon diametre $= \frac{176}{223}$ du pied de Rhin, ou $=$ $9\frac{3}{4}$ pouces anglois : ainſi, lorſque le diametre d'un boulet de fer a plus de $9\frac{3}{4}$ pouces, l'intégration de l'équation différentielle ci-deſſus dépendra de la quadrature du cercle; ſi ce diametre a moins, on pourra intégrer par les logarithmes, & c'eſt le cas qui ſe préſente le plus ſouvent. Cependant nous examinerons d'abord le dernier cas, où $h = \frac{16}{3} ngc$, ou lorſque $4ngch = \frac{3}{4}hh$, ou $4nch = \frac{3hh}{4g}$; on a alors $dx = \frac{-hh}{4g} \times \frac{dv}{(\frac{1}{2}h+v)^2}$, & $x = \frac{hh}{2g(h+v)} - \frac{hh}{2g(b+h)}$. D'où l'on tire la hauteur totale EA à laquelle le mobile pourra s'élever, en faiſant $v = 0$; car le boulet monte juſqu'à ce que ſa vîteſſe ſoit entiérement détruite. On aura donc, dans de cas, $EA = \frac{h}{2g} - \frac{hh}{2g(b+h)}$ $= \frac{bh}{2g(b+h)}$.

Mais lorſque le diametre du boulet eſt plus petit, & qu'on a $4ncgh < \frac{3}{4}hh$, on ſuppoſera $4ncgh = \frac{3}{4}hh - 3kk$, ce qui donne dx $= \frac{-(hh-4kk)dv}{4g(\frac{1}{2}h+v)^2-kk}$, ou $\frac{4gdx}{hh-4kk} =$ $\frac{dv}{2k(v+\frac{1}{2}h+k)} - \frac{dv}{2k(v+\frac{1}{2}h-k)}$, dont l'intégrale eſt $x = \frac{hh-4kk}{8gk}\, l\, \frac{(2v+h+2k)(2b+h-2k)}{(2v+h-2k)(2b+h+2k)}$; faiſant donc $v = 0$, on aura $EA = \frac{hh-4kk}{8gk}$ $l\, \frac{(h+2k)(2b+h-2k)}{(h-2k)(2b+h+2k)}$: & comme $g = 1 - \frac{1}{n}$, on aura $k = \sqrt{(\frac{1}{4}hh - \frac{4}{3}(n-1)ch.)}$ Nous allons nous ſervir de cette équation pour déter-

miner la hauteur verticale à laquelle doit s'élever un boulet de fer dont le diametre $= 5\frac{1}{2}$ pouces, & la vîtesse de 1650 pieds anglois. On a, en pieds de Rhin, $b = 40960$, $\frac{4nc}{3} = 3940$, & $\frac{4}{3}(n-1)ch = 110237500 = \frac{hh-4kk}{4}$; on trouve aussi $\frac{1}{4}hh = 195705800$, & $k = \sqrt{85468300} = 9245$; donc $\frac{hh-4kk}{8gk} = 5963$; ce qui donne $EA = 5963\,l\,\frac{46469 \times 91409}{9489 \times 128389} = 9376$. Ce boulet ne montera donc qu'à 9376 pieds de Rhin, tandis que, dans le vuide, il se feroit élevé à la hauteur de 40960 pieds. Mais comme la densité de l'air diminue à mesure qu'il est plus élevé, le boulet doit monter un peu plus haut qu'on ne vient de le trouver.

La hauteur EA, à laquelle le boulet doit monter, étant ainsi trouvée, nous pourrons la regarder comme connue, & la prendre à la place de la vîtesse en E, afin de pouvoir déterminer plus facilement le temps de la chûte. Soit, à cet effet, la hauteur totale $EA = a$; la vîtesse du boulet au point P, en montant $= \sqrt{v}$; & en descendant, $= \sqrt{u}$; la hauteur $AP = z$. Puisque $z = a - x$, on aura $dz = -dx$, & l'équation différentielle pour l'ascension du corps sera: $4nchdv = 4ngchdz + 3hvdz + 3vvdz$. Le corps en descendant n'ayant d'autre obstacle à vaincre que celui qui provient de la résistance de l'air, parce que la pesanteur agissant de haut en bas, ne fait qu'accélérer le mouvement, l'équation pour la chûte sera : $4nchdu = 4ngchdz - 3hudz - 3uudz$; cette équation vient de la premiere, en mettant $-c$ pour c,

Si l'on parvient donc à trouver l'intégrale de la premiere, ce changement suffira pour avoir l'intégrale de la seconde. Nous pourrons employer la méthode des approximations, comme la plus utile à notre objet. La premiere équation, lorsque z, & par conséquent v, sont encore très-petits, pouvant être réduite à celle-ci : $4nchdv = 4ngchdz$, ou $dv = gdz$, nous exprimerons v par cette suite : $v = gz + \alpha z^2 + \beta z^3 + \gamma z^4 + \delta z^5 +$ &c. dans laquelle les quantités α, β, γ, δ, &c. seront déterminées par la premiere équation. Afin de rendre ce calcul plus facile, nous supposerons $g = 1$, ce qui peut se faire, parce que la fraction $\frac{1}{n}$ étant très-petite, peut être négligée. Faisant ensuite $4nc = 3mh$, ou $m = \frac{4nc}{3h}$, cette équation deviendra $mhhdv = mhhdz + hvdz + vvdz$; & si l'on prend $v = z + \alpha z^2 + \beta z^3 + \gamma z^4 + \delta z^5 +$ &c. on trouvera $\alpha = \frac{1}{2mh}$; $\beta = \frac{1}{6m^2h^2}(2m + 1)$; $\gamma = \frac{1}{24m^3h^3}(8m + 1)$; $\delta = \frac{1}{120m^4h^4}(16m^2 + 22m + 1)$; ce qui donne $v = z + \frac{z^2}{2mh} + \frac{(1+2m)z^3}{6m^2h^2} + \frac{(1+8m)z^4}{24m^3h^3} + \frac{(1+22m+16m^2)z^5}{120m^4h^4} +$ &c. pour l'ascension du boulet : & pour sa chûte on aura $u = z - \frac{z^2}{2mh} + \frac{(1-2m)z^3}{6m^2h^2} - \frac{(1-8m)z^4}{24m^3h^3} + \frac{(1-22m+16m^2)z^5}{120m^4h^4} -$ &c. Pour tirer de là l'expression du temps employé à monter & du temps de la chûte, on cherchera la valeur de $\frac{1}{\sqrt{v}}$ & de $\frac{1}{\sqrt{u}}$, & l'on

trouvera $\frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{z}} \left(1 - \frac{z}{4mh} + \frac{(1-16m)z^2}{96m^2h^2} + \frac{(1-16m)z^3}{384m^3h^3} - \frac{(1+32m+256m^2)z^4}{10240m^4h^4} \text{ \&c.}\right)$, & $\frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{z}} \left(1 + \frac{z}{4mh} + \frac{(1+16m)z^2}{96m^2h^2} - \frac{(1+16m)z^3}{384m^3h^3} - \frac{(1-32m+256m^2)z^4}{10240m^4h^4} \text{ \&c.}\right)$ Multipliant ces formules par az, intégrant, & mettant a à la place de z, on trouvera le temps de la montée $= 2\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{6mh} + \frac{(1-16m)a^2\sqrt{a}}{240m^2h^2} + \frac{(1-16m)a^3\sqrt{a}}{1344m^3h^3} - \frac{(1+32m+256m^2)a^4\sqrt{a}}{46080m^4h^4}$ &c. & le temps de la descente $= 2\sqrt{a} + \frac{a\sqrt{a}}{6mh} + \frac{(1+16m)a^2\sqrt{a}}{240m^2h^2} - \frac{(1+16m)a^3\sqrt{a}}{1344m^3h^3} - \frac{(1-32m+256m^2)a^4\sqrt{a}}{46080m^4h^4}$ &c.). Ces deux expressions ajoutées ensemble, donneront le temps total pendant lequel le boulet reste en l'air, & ce temps est $= 4\sqrt{a} + \frac{a^2\sqrt{a}}{120m^2h^2} - \frac{a^3\sqrt{a}}{42m^2h^3} - \frac{(1+256m^2)a^4\sqrt{a}}{23040m^4h^4}$. Si l'on réduit a en milliemes de pied de Rhin, & qu'on divise par 250, on aura le temps en secondes; & réciproquement, si l'on donne le temps que le boulet met à monter & descendre, on trouvera la hauteur a à laquelle il est monté. Soit donc ce temps de μ secondes, & $t = 250\,\mu$, on aura $\sqrt{a} = \frac{t}{4} - \frac{t^5}{2^{15}\times3\times5\,m^2h^2} + \frac{t^7}{2^{17}\times3\times7\,m^2h^3} + \frac{t^9}{2^{29}\times3\times5\,m^4h^4} + \frac{t^9}{2^{21}\times5\times9\,m^2h^4}$. La hauteur ainsi déterminée est exprimée en milliemes du pied de Rhin; & comme cette suite est très-convergente, on peut se contenter des termes que nous

avons employés, pourvu toutefois que t ne soit pas un trop grand nombre.

Pour appliquer ce calcul, nous prendrons pour exemple une des expériences rapportées par M. Bernoulli, dans le Tome II. des Commentaires de l'Académie de Pétersbourg : elles ont été faites avec un boulet de fer de trois livres, & d'un diametre $= 0,2375$ du pied anglois ; on le tira verticalement avec deux onces de poudre ou $\frac{1}{8}$ de livre, la longueur du canon étant de 32 calibres. Le boulet retomba à terre après 34 secondes qu'il avoit employées à monter & descendre.

On a donc ici $n = 6647$; $c = 0,2304$ du pied de Rhin ; donc $nc = 1531$; $\frac{4}{3}\,nc = 2041$, & $mh = 2041000$ milliemes du pied de Rhin ; on a donc $m = 0,07295$; & si l'on multiplie $34''$ par 250, on aura $t = 8500$: d'où l'on tire $\frac{t}{4} = 2125$:

$$\frac{t^5}{2^{15} \times 15\, m^2 h^2} = 21,670$$

$$\frac{t^7}{2^{17} \times 21\, m^2 h^3} = 9,993$$

$$\frac{t^9}{2^{29} \times 15\, m^4 h^4} = 1,657$$

$$\frac{t^9}{2^{21} \times 45\, m^2 h^4} = 1,193$$

donc $\sqrt{a} = 2116,173$ & $a = 4478$ pieds de Rhin.

Selon ce calcul, le boulet auroit dû monter à une hauteur de 4478 pieds de Rhin ; d'où l'on peut déduire la vîtesse primitive du boulet, ou la hauteur b dont il devroit tomber dans le vuide pour acquérir cette vîtesse : car puisque $EA = a = 4478$ pieds de Rhin, hauteur qui differe peu de celle que M. Bernoulli a trouvée ; si l'on

prend $k = \sqrt{(\frac{1}{4}\, hh - \frac{4}{3}\, nch)}$, on aura $k =$ 11773 pieds de Rhin ; on a auſſi $a = \frac{hh - 4kk}{8gk}\, l\, \frac{(h+2k)(2b+h-2k)}{(h-2k)(2b+h+2k)}$. Pour tirer de cette équation la valeur de b, puiſque $g = 1$, & $\frac{1}{4}\, hh - kk = 2041\, h$, on aura $\frac{8ak}{hh-4kk} = 1{,}8464$. Prenant enſuite e pour le nombre dont le logarithme hyperbolique eſt 1 ; $e^{1{,}8464}$ ſera $= 6{,}3373$, & la hauteur b que l'on cherche ſera exprimée par $b = \frac{5{,}3373\,(hh-4kk)}{2h+4k-6{,}3373\,(2h-4k)}$, ce qui donne $b =$ 26014 pieds de Rhin : il faudroit donc que la vîteſſe du boulet, en ſortant du canon, eût été de 1275 pieds par ſeconde. Il eſt vrai que cette vîteſſe eſt plus grande que celle qui réſulte de la théorie de M. Bernoulli, mais l'on ne doit pas en être ſurpris : nous avons ſuppoſé avec l'Auteur la réſiſtance beaucoup plus grande que M. Bernoulli, il falloit donc néceſſairement que le boulet eût d'abord une vîteſſe plus grande pour monter à la même hauteur. Mais il ſe préſente ici une autre difficulté bien plus grande, c'eſt qu'il n'eſt pas poſſible d'expliquer par ce qui a été établi ci-devant ſur les effets de la poudre, comment un boulet de trois livres a pu recevoir une auſſi grande vîteſſe avec la charge de $\frac{1}{8}$ de livre : car en ſuppoſant, ſuivant la regle que nous avons donnée, $P = 3$, le poids de la charge $= \frac{1}{8}$, & la longueur du canon $i = 32$, on trouve $b = 6855$ pieds de Rhin, ce qui ne produit qu'une vîteſſe de 654 pieds par ſeconde. La différence entre ce nombre & 1275 eſt trop conſidérable, pour qu'on puiſſe l'attribuer à un

léger écart de la théorie de la vérité ; ainsi, à moins qu'il ne se soit glissé quelqu'erreur dans les expériences, il faut, ou que la force de la poudre soit quatre fois plus grande que l'Auteur ne l'a supposée, c'est aussi la conséquence que M. Bernoulli tire de ces expériences, ou que l'approximation dont nous nous sommes servis ne soit pas juste : car quoique la série que nous avons employée soit très-convergente dans les cinq premiers termes, il peut se faire néanmoins que les suivans soient assez grands pour diminuer la valeur de a. Pour s'en assurer, nous renverserons la question, & supposant que la vîtesse initiale est de 1275 pieds par seconde, nous chercherons le temps que le boulet a dû employer à monter & à descendre ; nous verrons alors si ce temps est le même que celui de l'expérience, c'est-à-dire de 34''.

Soit, à cet effet, $b = 26014$ pieds de Rhin ; $m = \frac{4nc}{3h} = 0{,}07295$, & $mh = 2041$. L'équation $mhhdv = mhhdz + hvdz + vvdz$, que nous avons trouvée pour l'ascension du boulet, donne $dz = \frac{mhhdv}{mhh + hv + vv}$; si l'on fait $mhh = \frac{1}{4}hh - kk$, on aura $k = 11773$ pieds de Rhin, donc $dz = \frac{mhhdv}{(v + \frac{1}{2}h + k)(v + \frac{1}{2}h - k)}$; & le temps $t = \frac{dz}{\sqrt{v}} = \frac{mhhdv}{(v + \frac{1}{2}h + k)(v + \frac{1}{2}h - k)\sqrt{v}}$. Soit $\sqrt{v} = s$, on aura $dt = \frac{2mhhds}{(ss + \frac{1}{2}h + k)(ss + \frac{1}{2}h - k)}$, ou $dt = \frac{mhh}{k}\left(\frac{ds}{ss + \frac{1}{2}h - k} - \frac{ds}{ss + \frac{1}{2}h + k}\right)$. Mais $\frac{1}{2}h - k = 2216{,}5$, & $\frac{1}{2}h + k = 25762{,}5$; ainsi

l'intégration de ces deux termes dépend de la quadrature du cercle. Soit, pour abréger $\frac{1}{2}h - k = 2216,5 = \beta\beta$, & $\frac{1}{2}h + k = 25762,5 = \gamma\gamma$ on aura $t = \frac{mhh}{\beta k}$ A tang. $\frac{s}{\beta}$ — $\frac{mhh}{\gamma k}$ A tang. $\frac{s}{\gamma}$. Si l'on réduit ces grandeurs en milliemes du pied de Rhin, & qu'on divise par 250, on aura le temps en secondes, & le temps total de la montée se trouvera en faisant $v = b$, $s = \sqrt{b} = 161,29$, ce qui donne $\beta = 47,08$; $\gamma = 160,50$; $\frac{mh}{k} = 0,17336$; $\frac{\sqrt{h}}{\beta} = 3,55298$; $\frac{\sqrt{h}}{\gamma} = 1,04218$; on aura donc $t = 3,66797$ $\left(3,55298 \text{ A tang. } \frac{16129}{4708} - 1,04218 \text{ A tang. } \frac{16129}{16050}\right)$ (37); ce qui donne le temps de $13''\frac{3}{4}$.

Pour déterminer le temps de la chûte, il faut d'abord chercher la vîtesse que le boulet acquiert en tombant, ce qu'on trouvera par l'équation

---

(37) Pour parvenir à cette expression de la valeur du temps, il faut changer l'équation $t = \frac{mhh}{\beta k}$ A tang. $\frac{s}{\beta}$ — $\frac{mhh}{\gamma k}$ A tang. $\frac{s}{\gamma}$, en celle-ci : $t = \frac{mh\sqrt{h}}{k}$ $\left(\frac{\sqrt{h}}{\beta} \text{ A tang. } \frac{s}{\beta} - \frac{\sqrt{h}}{\gamma} \text{ A tang. } \frac{s}{\gamma}\right)$. Il suffit alors que dans le facteur $\frac{mh\sqrt{h}}{k}$, la hauteur h soit réduite en milliemes du pied de Rhin, & divisée par 250; cette préparation est inutile sur les autres quantités, qui sont toutes homogenes, & dont on ne considere que les rapports.

$dz =$

$dz = \frac{mhh\,dv}{mhh - hu - uu}$. Soit $mhh = ff - \frac{1}{4}hh$; f sera $= h\sqrt{(m + \frac{1}{4})} = 15900$, & $dz = \frac{mhh\,du}{(f - \frac{1}{2}h - u)(f + \frac{1}{2}h + u)} = \frac{mhh}{2f}\left(\frac{du}{f + \frac{1}{2}h + u} + \frac{du}{f - \frac{1}{2}h - u}\right)$, dont l'intégrale complette eſt $z = \frac{mhh}{2f}\, l\, \frac{(f - \frac{1}{2}h)(f + \frac{1}{2}h + u)}{(f + \frac{1}{2}h)(f - \frac{1}{2}h - u)}$. Suppoſons maintenant $z = 4478$ pieds de Rhin, qui eſt la hauteur trouvée AE $= a$, on aura $\frac{2fz}{mhh} = \frac{2a\sqrt{(m + \frac{1}{4})}}{mh} = 2{,}49367$, & $e^{2{,}49367} = 12{,}1056$: nous indiquerons ce dernier nombre par N; on a donc $N = \frac{ff - \frac{1}{4}hh + (f - \frac{1}{2}h)u}{ff - \frac{1}{4}hh - (f + \frac{1}{2}h)u}$, & $u = \frac{mhh(N - 1)}{(f + \frac{1}{2}h)N + f - \frac{1}{2}h}$, ce qui donne $u = 1743{,}7$ pieds de Rhin. Soit maintenant t le temps de la chûte, on aura $dt = \frac{dz}{\sqrt{u}} = \frac{mhh}{2f}\left(\frac{\frac{du}{\sqrt{u}}}{f + \frac{1}{2}h + u} + \frac{\frac{du}{\sqrt{u}}}{f - \frac{1}{2}h - u}\right)$. Faiſons $\sqrt{u} = s = 41{,}7582$; $f + \frac{1}{2}h = \beta\beta$; $f - \frac{1}{2}h = \gamma\gamma$; on aura $\beta = 172{,}873$, $\gamma = 43{,}7607$, & $dt = \frac{mhh}{f}\left(\frac{ds}{\beta\beta + ss} + \frac{ds}{\gamma\gamma - ss}\right)$, dont l'intégrale eſt $t = \frac{mhh}{\beta f}\,\text{A tang.}\,\frac{s}{\beta} + \frac{mhh}{2\gamma f}\, l\, \frac{\gamma + s}{\gamma - s}$; mais $\frac{mh}{f} = 0{,}128365$; $\frac{\sqrt{h}}{\beta} = 0{,}96759$, & $\frac{\sqrt{h}}{2\gamma} = 1{,}91118$; donc $t = 2{,}71595\left(0{,}96759\,\text{A tang.}\,\frac{417582}{1728730} + 1{,}91118\, l\, \frac{855189}{20025}\right)$ ſecondes;

le temps de la chûte eſt donc 20,11 ſecondes, & le temps total que le boulet eſt reſté en l'air eſt de 33,87 ſecondes, qui ne differe du temps obſervé de 34″, que de $\frac{3}{100}$; ce qui fait voir qu'on peut s'en tenir à notre approximation.

Puiſqu'il n'y a point d'erreur dans ce calcul, il faut néceſſairement que la vîteſſe du boulet, au ſortir du canon, ait été d'environ 1275 pieds par ſeconde. Nous avons déjà dit que, ſelon notre théorie, deux onces de poudre ne pouvoient communiquer au boulet qu'une vîteſſe de 654 pieds par ſeconde. Cette différence eſt trop grande, & la charge de poudre trop petite, pour que ce ſurcroît de force puiſſe être attribué à une plus forte intenſité de chaleur pendant l'inflammation. On ne peut pas conclure non plus de cette expérience, que la force de la poudre ſurpaſſe beaucoup celle que nous lui avons ſuppoſée : car, ſi cela étoit, il faudroit que dans toutes les épreuves de l'Auteur la vîteſſe eût été preſque double de ce qu'on l'a trouvée par l'expérience, ce qu'on ne peut pas accorder. Selon nos Tables, cette vîteſſe ne peut être produite que par une charge d'une demi-livre, & conſéquemment quadruple de celle de 2 onces que nous avons employée dans nos calculs. La hauteur de 4478 pieds eſt auſſi trop peu conſidérable, pour qu'il en puiſſe réſulter un changement notable dans la denſité de l'air, qui, ſelon toutes les opinions, ne peut varier que d'un cinquieme au plus de A en E. Nous ne nous arrêterons donc pas davantage à cette expérience, pour continuer nos recherches ſur le mouvement curviligne du boulet.

TROISIEME REMARQUE.

Soit, comme ci-dessus, le diametre du boulet $= c$, le rapport de sa pesanteur à celle de l'air, comme n à 1; & la hauteur à laquelle la vîtesse en E est due, $= b$ (fig. 23). Supposons que le boulet parte suivant une direction oblique EH, qui fasse avec l'horizon l'angle HEF = I. La vîtesse du boulet étant exprimée par $\sqrt{b}$, on la décomposera en deux autres, l'une dirigée horizontalement suivant EF, & l'autre verticalement suivant EG : la premiere sera $= \sqrt{b}\ cos.\ I$, & l'autre $= \sqrt{b}\ sin.\ I$. Soit ensuite le boulet arrivé en M dans le temps t, & sa vîtesse en M $= \sqrt{v}$; menez la verticale MP, faites EP $= x$; PM $= y$, vous aurez, après avoir mené l'infiniment proche mp, Pp = Mr $= dx$; & mr = Mq $= dy$. Soit de plus l'élément Mm de la courbe $= \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$, & l'angle mM$r = i$, on aura $sin.\ i = \frac{dy}{ds}$; $cos.\ i = \frac{dx}{ds}$, & tang. $i = \frac{dy}{dx}$. La vîtesse horizontale du boulet en M, sera $= \sqrt{v}\ cos.\ i$, & la vîtesse verticale au même point M, $= \sqrt{v}.\ sin.\ i$; on aura d'ailleurs pour le temps, $dt = \frac{ds}{\sqrt{v}}$. La force de la pesanteur sera exprimée, comme ci-dessus, par $1 - \frac{1}{n}$, que nous ferons $= g$ pour abréger; cette force diminuera la vîtesse verticale. On a aussi la force de la résistance $= \frac{3v(h+v)}{4nch}$, qui agit suivant la direction Mm; ainsi la vîtesse verticale est diminuée

par une force $= \frac{3v(h+v)}{4nch}$ *sin.* i; & la vîtesse horizontale par une force $= \frac{3v(h+v)}{4nch}$ *cos.* i.
On a donc les deux équations :

$$d(v\,\text{fin.}\,i^2) = -gdy - \frac{3v(h+v)dy\,\text{fin.}\,i}{4nch}$$

$$d(v\,\text{cos.}\,i^2) = \frac{-3v(h+v)dx\,\text{cos.}\,i}{4nch}$$

& parce que $dx = ds\,\text{cos.}\,i$, & $dy = ds\,\text{fin.}\,i$, on aura :

$$R\begin{cases} dv\,\text{fin.}\,i^2 + 2vdi\,\text{fin.}\,i\,\text{cos.}\,i = -gds\,\text{fin.}\,i - \frac{3v(h+v)ds\,\text{fin.}\,i^2}{4nch} \\ dv\,\text{cos.}\,i^2 - 2vdi\,\text{fin.}\,i\,\text{cos.}\,i = \frac{-3v(h+v)ds\,\text{cos.}\,i^2}{4nch} \end{cases}$$

Ces deux équations, divisées l'une par l'autre, donnent :

$$\frac{dv\,\text{fin.}\,i^2 + 2vdi\,\text{fin.}\,i\,\text{cos.}\,i}{dv\,\text{cos.}\,i^2 - 2vdi\,\text{fin.}\,i\,\text{cos.}\,i} = \frac{4ngch\,\text{fin.}\,i + 3v(h+v)\,\text{fin.}\,i^2}{3v(h+v)\,\text{cos.}\,i^2}$$

où il n'y a plus que deux grandeurs variables, v & i. Cette équation peut être changée en celle-ci :

$$2ngchdv\,\text{cos.}\,i = 4ngchvdi\,\text{fin.}\,i + 3vv(h+v)di.$$

Si l'on dégage dv dans les deux équations R, & qu'on en tire une valeur de v, on aura $v = \frac{-gds\,\text{cos.}\,i}{2di}$. Donc, si l'on pouvoit déduire v de l'angle i, on auroit $ds = \frac{-2vdi}{g\,\text{cos.}\,i}$; par conséquent $dx = \frac{-2vdi}{g}$, & $dy = \frac{-2vdi\,\text{tang}\,i}{g}$.
Veut-on avoir une équation entre x & y? On ajoutera les deux équations R, dont la somme donne $dv = -gdy - \frac{3v(h+v)ds}{4nch}$. Soit $dy = pdx$, on aura $ds = dx\sqrt{(1+pp)}$; *sin.* $i =$

$\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$, & *cof.* $i = \frac{1}{\sqrt{(1+pp)}}$; dont la différentielle eft $di\, fin.\, i = \frac{pdp}{(1+pp)(\sqrt{(1+pp)})}$, donc $di = \frac{dp}{1+pp}$; d'où l'on tire $v = \frac{-gdx(1+pp)}{2\,dp}$. Soit enfuite $dp = qdx$, on aura $v = \frac{-(1+pp)g}{2q}$ & $dv = \frac{-gpdp}{q} + \frac{gdq(1+pp)}{2qq}$ $= -gdy + \frac{gdq(1+pp)}{2qq}$;

donc $\frac{4}{3}nchdq = hdp\sqrt{(1+pp)} - \frac{g(1+pp)^{\frac{3}{2}}dp}{2q}$

ou $\frac{4}{3}ncdq = dp\sqrt{(1+pp)} - \frac{gdp(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}{2hq}$.

Pour intégrer cette équation, on doit confidérer qu'à l'origine E du mouvement, on a I. $x = 0$; II. $y = 0$; III. $p =$ tang. I; & IV. $q = \frac{-g}{2\,b\,cof.\,I^2}$. Et fi q eft exprimé par p, on aura $x = \int \frac{dp}{q}$, & $y = \int \frac{pdp}{q}$. Mais comme l'équation entre p & q ne peut pas être intégrée, il faudra tâcher d'y parvenir par une approximation convenable. Pour cela, foit $\frac{4}{3}nc = k$; $\frac{2h}{g} = f$; $p = \frac{u}{\sqrt{(1-uu)}}$ & $q = \frac{1}{r}$; l'équation ci-deffus fera changée en celle-ci:
$k(1-uu)^3\,dr + rrdu\,(1-uu) - \frac{1}{f}r^3\,du = 0$.
Soit maintenant $r = a + Au + Bu^2 + Cu^3 +$ &c. on trouvera

$$A = \frac{a^2(a-f)}{kf}$$
$$B = \frac{a^3(a-f)(3a-2f)}{2kkff}$$
$$C = \frac{a^2(3a-2f)}{3kf} + \frac{a^4(a-f)(15aa-20af+6ff)}{6k^3f^3}$$
&c.

On a donc à l'origine E du mouvement : $u = fin. \mathrm{I}$; $\sqrt{(1 - uu)} = cof. \mathrm{I}$, & $r = \frac{-2b\, cof. \mathrm{I}^2}{g}$.

Et puifque $dp = \frac{du}{(1-uu)^{\frac{3}{2}}}$, & $pdp = \frac{udu}{(1-uu)^2}$;

on aura $x = \int \frac{du(a + \mathrm{A}u + \mathrm{B}u^2 + \mathrm{C}u^3 + \&c.)}{(1-uu)^{\frac{3}{2}}}$

$$y = \int \frac{udu(a + \mathrm{A}u + \mathrm{B}u^2 + \mathrm{C}u^3 + \&c.)}{(1-uu)^2}.$$

Mais
$$\left.\begin{array}{l}
\int \frac{du}{(1-uu)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{\sqrt{(1-uu)}} \\
\int \frac{udu}{(1-uu)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{(1-uu)}} \\
\int \frac{u^2 du}{(1-uu)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{\sqrt{(1-uu)}} - A\, fin.\, u \\
\int \frac{u^3 du}{(1-uu)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2-uu}{\sqrt{(1-uu)}} \\
\&c. \\
\int \frac{udu}{(1-uu)^2} = \frac{1}{2(1-uu)} \\
\int \frac{u^2 du}{(1-uu)^2} = \frac{u}{2(1-uu)} - \frac{1}{4}\, l\, \frac{1+u}{1-u} \\
\int \frac{u^3 du}{(1-uu)^2} = \frac{1}{2(1-uu)} + \frac{1}{2} l(1-uu) \\
\int \frac{u^4 du}{(1-uu)^2} = \frac{3u-2u^3}{2(1-uu)} - \frac{3}{4}\, l\, \frac{1+u}{1-u} \\
\&c.
\end{array}\right\} (38)$$

(38) Ces différentielles s'integrent, favoir, la premiere par l'article 70, tome III. du Cours de M. Bézout ; la feconde par l'article 66 ; la troifieme par l'article 106, en ramenant l'intégration à celle de $\frac{du}{\sqrt{(1-uu)}}$, qui eft la différentielle d'un arc de cercle dont le finus $= u$; la

On aura donc

$$x = \mathrm{E} + \frac{au}{\sqrt{(1-uu)}} + \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{(1-uu)}} + \frac{\mathrm{B}u}{\sqrt{(1-uu)}} - BA\,\mathit{fin}.\,u + \frac{\mathrm{C}(2-uu)}{\sqrt{(1-uu)}}\ \&c.$$

$$y = \mathrm{F} + \frac{a}{2(1-uu)} + \frac{\mathrm{A}u}{2(1-uu)} + \frac{\mathrm{B}}{2(1-uu)} - \frac{\mathrm{A}}{4}\,l\,\frac{1+u}{1-u} + \frac{\mathrm{B}}{2}\,l\,(1-uu) + \frac{\mathrm{C}(3u-2u^3)}{2(1-uu)} - \frac{3\mathrm{C}}{4}\,l\,\frac{1+u}{1-u}\ \&c.$$

Pour déterminer les quantités a, E, F, il faut confidérer le mouvement à fon origine, & on trouvera :

$$\frac{-2b\,\mathit{cof}.\mathrm{I}^2}{g} = a + \mathrm{A}\,\mathit{fin}.\,\mathrm{I} + \mathrm{B}\,\mathit{fin}.\,\mathrm{I}^2 + \mathrm{C}\,\mathit{fin}.\,\mathrm{I}^3 + \&c.$$

$$-\mathrm{E} = \frac{a\,\mathit{fin}.\mathrm{I}}{\mathit{cof}.\mathrm{I}} + \frac{\mathrm{A}}{\mathit{cof}.\mathrm{I}} + \frac{\mathrm{B}\,\mathit{fin}.\mathrm{I}}{\mathit{cof}.\mathrm{I}} - \mathrm{BI} + \frac{\mathrm{C}(1+\mathit{cof}.\mathrm{I}^2)}{\mathit{cof}.\mathrm{I}}\ \&c.$$

$$-\mathrm{F} = \frac{a}{2\,\mathit{cof}.\mathrm{I}^2} + \frac{\mathrm{A}\,\mathit{fin}.\mathrm{I}}{2\,\mathit{cof}.\mathrm{I}^2} + \frac{\mathrm{B}}{2\,\mathit{cof}.\mathrm{I}^2} - \frac{\mathrm{A}}{4}\,l\,\frac{1+\mathit{fin}.\mathrm{I}}{1-\mathit{fin}.\mathrm{I}} + \mathrm{B}l\,\mathit{cof}.\mathrm{I} + \frac{\mathrm{C}(3\,\mathit{fin}.\mathrm{I}-2\,\mathit{fin}.\mathrm{I}^3)}{2\,\mathit{cof}.\mathrm{I}^2} - \tfrac{3}{4}\mathrm{C}l\,\frac{1+\mathit{fin}.\mathrm{I}}{1-\mathit{fin}.\mathrm{I}}\ \&c.$$

ayant donc fait $m\mathrm{M}r = i$, on aura $p =$

---

quatrieme par l'article 68 ; la cinquieme par l'article 66 ; la fixieme par l'article 106, en ramenant à l'intégration de $\frac{du}{1-uu}$, qui eft la différentielle de $\frac{1}{2}\,l\,\frac{1+u}{1-u}$; la feptieme par l'article 66 ; & la huitieme par l'article 106, comme la fixieme.

tang. i ; $u = \text{fin.}\, i$, & $\sqrt{(1 - uu)} = \text{cof.}\, i$; ce qui donnera :

$$x = a \text{ tang. } i + \frac{A}{\text{cof. I}} + B \text{ tang. } i$$
$$- B i$$
$$+ \frac{C(1 + \text{cof.}\, i^2)}{\text{cof.}\, i} \text{ \&c.}$$
$$- a \text{ tang. I} - \frac{A}{\text{cof. I}} - B \text{ tang. I}$$
$$+ BI$$
$$- \frac{C(1 + \text{cof. I}^2)}{\text{cof. I}} \text{ \&c.}$$

$$y = \frac{a}{2 \text{cof.}\, i^2} + \frac{A \text{fin.}\, i}{2 \text{cof.}\, i^2} + \frac{B}{2 \text{cof.}\, i^2}$$
$$- \tfrac{1}{4} A l \frac{1 + \text{fin.}\, i}{1 - \text{fin.}\, i} + B l \text{ cof.}\, i$$
$$+ \frac{C(3 \text{fin.}\, i - 2 \text{fin.}\, i^3)}{2 \text{cof.}\, i^2} - \tfrac{3}{4} C l \frac{1 + \text{fin.}\, i}{1 - \text{fin.}\, i} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{a}{2 \text{cof. I}^2} - \frac{A \text{fin. I}}{2 \text{cof. I}^2} - \frac{B}{2 \text{cof. I}^2}$$
$$+ \tfrac{1}{4} A l \frac{1 + \text{fin. I}}{1 - \text{fin. I}} - B l \text{ cof. I}$$
$$- \frac{C(3 \text{fin. I} - 2 \text{fin. I}^3)}{2 \text{cof. I}^2} + \tfrac{3}{4} C l \frac{1 + \text{fin. I}}{1 - \text{fin. I}} \text{ \&c.}$$

Lorſque k eſt un très-grand nombre, il faudroit que les valeurs des lettres A, B, C, allaſſent en diminuant ; nous voyons cependant que dans cette approximation C ne devient pas moindre que A ; ainſi, pour avoir une autre approximation plus convenable à notre objet, nous mettrons tout de ſuite l'angle i à la place de u dans l'équation différentielle, ce qui donnera :

$$k dr \text{ cof.}\, i^3 + rr di \text{ cof.}\, i^2 = \frac{1}{f} r^3 \, di.$$

Si l'on ſuppoſe $r = a + P + Q + \text{\&c.}$ & que l'on compare les termes ſemblables, on aura :

$$P = \frac{-aa}{k} \int \frac{di}{cof.\, i^3} + \frac{a^3}{kf} \int \frac{di}{cof.\, i^5}$$

$$Q = \frac{-2a}{k} \int \frac{P\,di}{cof.\, i^3} + \frac{3a^2}{fk} \int \frac{P\,di}{cof.\, i^5}$$

&c.

Il eſt à obſerver ici qu'à l'origine, où $i = I$; il faut que $r = \frac{-2b\, cof.\, I^2}{g}$; ce qui donne :

$$x = \int \frac{r\,di}{cof.\, i^2} = \frac{r\, fin.\, i}{cof.\, i} - \int \frac{dr\, fin.\, i}{cof.\, i}$$

$$y = \int \frac{r\, di\, fin.\, i}{cof.\, i^3} = \frac{r}{2\, cof.\, i^2} - \frac{1}{2} \int \frac{dr}{cof.\, i^2}$$

Pour trouver ces valeurs, nous ſuppoſerons, pour abréger, $\int \frac{di}{cof.\, i} = Z$, & nous aurons $Z = \frac{1}{2}\, l\, \frac{1 + fin.\, i}{1 - fin.\, i} = l\, \text{tang.}\, (45° + \frac{1}{2}\, i)$; c'eſt-à-dire que Z eſt le logarithme hyperbolique de la tangente de $45° + \frac{1}{2}\, i$, le rayon étant $= 1$. On trouvera en outre :

$$\int \frac{di}{cof.\, i^3} = \frac{fin.\, i}{2\, cof.\, i^2} + \frac{Z}{2} \quad (39)$$

$$\int \frac{di}{cof.\, i^5} = \frac{fin.\, i}{4\, cof.\, i^4} + \frac{3\, fin.\, i}{4.2\, cof.\, i^2} + \frac{3\,Z}{4.2}$$

$$\int \frac{di}{cof.\, i^7} = \frac{fin.\, i}{6\, cof.\, i^6} + \frac{5\, fin.\, i}{6.4\, cof.\, i^4}$$

---

(39) L'intégrale des quantités $\frac{di}{cof.\, i^3}$, $\frac{di}{cof.\, i^5}$ &c. ſe trouve en faiſant $fin.\, i = x$, ce qui donne $cof.\, i = \sqrt{(1 - xx)}$; $di = \frac{dx}{cof.\, i} = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, & $\frac{di}{cof.\, i^3} = \frac{dx}{(1-xx)^2} = dx\, (1 - xx)^{-2}$, dont on ramene l'intégration à celle de $\frac{dx}{1 - xx} = \frac{di}{cof.\, i}$, en opérant comme il eſt preſcrit par l'article 106 du Cours cité plus haut.

$$+ \frac{5.3 \, \text{fin.}\, i}{6.4.2 \, \text{cof.}\, i^2} + \frac{5.3 Z}{6.4.2}$$

& ainfi de fuite.

Pour trouver enfuite la valeur de Q, on a:

$$\left.\begin{aligned} &\int \frac{di}{\text{cof.}\, i^3} \int \frac{di}{\text{cof.}\, i^3} = \frac{1}{8} \left(\frac{\text{fin.}\, i}{\text{cof.}\, i^2} + Z \right)^2 \\ &\int \frac{di}{\text{cof.}\, i^3} \int \frac{di}{\text{cof.}\, i^5} = \frac{1}{24 \, \text{cof.}\, i^6} + \frac{3}{32} \\ &\quad \left(\frac{\text{fin}\, i}{\text{cof.}\, i^2} + Z \right)^2 \end{aligned}\right\} (40)$$

$$\int \frac{di}{\text{cof.}\, i^5} \int \frac{di}{\text{cof.}\, i^5} = \frac{1}{32} \left(\frac{\text{fin.}\, i}{\text{cof.}\, i^4} + \frac{3 \, \text{fin}\, i}{2 \, \text{cof.}\, i^2} + \frac{3 Z}{2} \right)^2$$

$$\int \frac{di}{\text{cof.}\, i^5} \int \frac{di}{\text{cof.}\, i^3} = - \frac{1}{24 \, \text{cof.}\, i^6} + \frac{1}{24} \left(\frac{\text{fin.}\, i}{\text{cof.}\, i^4} + \frac{3 \, \text{fin.}\, i}{2 \, \text{cof.}\, i^2} + \frac{3 Z}{2} \right)^2$$

---

(40) Il eft aifé de voir qu'en général toute différentielle de cette forme $dX \int dX$, a pour intégrale $\frac{1}{2} X^2$.

A l'égard de $\int \frac{di}{\text{cof.}\, i^3} \int \frac{di}{\text{cof.}\, i^5}$, comme on vient de trouver la valeur de $\int \frac{di}{\text{cof.}\, i^5}$, on la fubftituera dans $\int \frac{di}{\text{cof.}\, i^3} \int \frac{di}{\text{cof.}\, i^5}$, & l'on aura $\int \left(\frac{di \, \text{fin.}\, i}{4 \, \text{cof.}\, i^7} + \frac{3 \, di \, \text{fin.}\, i}{8 \, \text{cof.}\, i^5} + \frac{3 Z di}{8 \, \text{cof.}\, i^3} \right)$. Or, les deux premiers s'intègrent facilement par ce qui a été dit dans la note précédente ; il ne refte donc plus qu'à trouver l'intégrale de $\frac{Z di}{\text{cof.}\, i^3}$, qu'il faudra multiplier par $\frac{3}{8}$. Pour cela, on fuppofera $\text{fin.}\, i = x$, ce qui donne $\int \frac{Z di}{\text{cof.}\, i^3} = \frac{Z dx}{(1 - xx)^2}$; on fera enfuite $\int \frac{Z dx}{(1 - xx)^2} = Z \int \frac{dx}{(1 - xx)^2}$.

de là on tire

$$P = \frac{-aa}{2k}\left(\frac{\text{fin.}\, i}{\text{cof.}\, i^3} + Z\right) + \frac{a^3}{4fk}\left(\frac{\text{fin.}\, i}{\text{cof.}\, i^4} + \frac{3\,\text{fin.}\, i}{\text{cof.}\, i^2} + \frac{3Z}{2}\right)$$

$$Q = \frac{2a^3}{8k^2}\left(\frac{\text{fin.}\, i}{\text{cof.}\, i^2} + Z\right)^2 - \frac{a^4}{3fk^2\,\text{cof.}\, i^6} - \frac{3a^4}{32fk^2}\left(\frac{1}{\text{cof.}\, i^4} - \frac{5}{\text{cof.}\, i^2} + \frac{4Z\,\text{fin.}\, i}{\text{cof.}\, i^4} + \frac{10Z\,\text{fin.}\, i}{\text{cof.}\, i^2} + 5Z^2\right) + \frac{3a^5}{32f^2k^2}\left(\frac{\text{fin.}\, i}{\text{cof.}\, i^4} + \frac{3\,\text{fin.}\, i}{2\,\text{cof.}\, i^2} + \frac{3Z}{2}\right)^2.$$

Lorſqu'il n'y a point de réſiſtance, on a $r = a$, & la courbe eſt alors une parabole. Ainſi lorſque la réſiſtance n'eſt pas extrêmement grande,

---

$-\int\left(dZ\int\frac{dx}{(1-xx)^2}\right)$, quantités qui ſont effectivement égales, comme on peut s'en aſſurer en les différentiant. Mais $\int\frac{dx}{(1-xx)^2} = \frac{x}{2(1-xx)} + \frac{1}{2}Z$. Subſtituant, on aura $\int\frac{Z\,dx}{(1-xx)^2} = \frac{Zx}{2(1-xx)} + \frac{1}{2}Z^2 = \int\frac{x\,dZ}{2(1-xx)} - \int\frac{1}{2}Z\,dZ =$ (à cauſe de $dZ = \frac{dx}{1-xx}$) $\frac{Zx}{2(1-xx)} + \frac{1}{2}Z^2 - \int\frac{x\,dx}{2(1-xx)^2} - \frac{1}{4}Z^2$; Or $\int\frac{x\,dx}{2(1-xx)^2} = \frac{1}{4(1-xx)}$; donc enfin $\int\frac{Z\,dx}{(1-xx)^2} = \frac{-1}{4(1-xx)} + \frac{Zx}{2(1-xx)} + \frac{1}{4}Z^2$. Multipliant par $\frac{3}{8}$, & ajoutant les intégrales des deux premiers termes ci-deſſus, on trouvera $\frac{1}{24\,\text{cof.}\, i^6} + \frac{3}{32}\left(\frac{\text{fin.}\, i}{\text{cof.}\, i^2} + Z\right)^2$ pour l'intégrale demandée. On trouve, par le même procédé, l'intégrale de $\int\frac{di}{\text{cof.}\, i^5}$ $\int\frac{di}{\text{cof.}\, i^3}$.

l'équation $r = a + P$ pourra ſuffire, & l'on aura :

$$x = E + \frac{a\,\text{ſin.}\,i}{\text{coſ.}\,i} + \frac{P\,\text{ſin.}\,i}{\text{coſ.}\,i} - \int \frac{dP\,\text{ſin.}\,i}{\text{coſ.}\,i}$$

$$y = F + \frac{a}{2\,\text{coſ.}\,i^2} + \frac{P}{2\,\text{coſ.}\,i^2} - \tfrac{1}{2} \int \frac{dP}{\text{coſ.}\,i^2}$$

Dans ces équations

$$dP = \frac{-aa\,di}{k\,\text{coſ.}\,i^3} + \frac{a^3\,di}{fk\,\text{coſ.}\,i^5}$$

donc $\int \frac{dP\,\text{ſin.}\,i}{\text{coſ.}\,i} = \frac{-aa}{3k\,\text{coſ.}\,i^3} + \frac{a^3}{5fk\,\text{coſ.}\,i^5}$

& $\int \frac{dP}{\text{coſ.}\,i^2} = \frac{-aa}{4k} \left(\frac{\text{ſin.}\,i}{\text{coſ.}\,i^4} + \frac{3\,\text{ſin.}\,i}{2\,\text{coſ.}\,i^2} + \frac{3Z}{2} \right) + \frac{a^3}{6fk} \left(\frac{\text{ſin.}\,i}{\text{coſ.}\,i^6} + \frac{5\,\text{ſin.}\,i}{4\,\text{coſ.}\,i^4} + \frac{15\,\text{ſin.}\,i}{8\,\text{coſ.}\,i^2} + \frac{15Z}{8} \right).$

Subſtituant ces valeurs de P & de dP, on aura :

$$x = E + a\,\text{tang.}\,i - \frac{aa}{k} \left(\frac{1}{6\,\text{coſ.}\,i^3} - \frac{1}{2\,\text{coſ.}\,i} + \tfrac{1}{2} Z\,\text{tang.}\,i \right) + \frac{a^3}{fk} \left(\frac{1}{20\,\text{coſ.}\,i^5} + \frac{1}{8\,\text{coſ.}\,i^3} - \frac{3}{8\,\text{coſ.}\,i} + \tfrac{3}{8} Z\,\text{tang.}\,i \right)$$

$$y = F + \frac{a}{2\,\text{coſ.}\,i^2} - \frac{aa}{4k} \left(\frac{\text{ſin.}\,i}{2\,\text{coſ.}\,i^4} - \frac{3\,\text{ſin.}\,i}{4\,\text{coſ.}\,i^2} - \tfrac{3}{4} Z + \frac{Z}{\text{coſ.}\,i^2} \right) + \frac{a^3}{4fk} \left(\frac{\text{ſin.}\,i}{6\,\text{coſ.}\,i^6} + \frac{\text{ſin.}\,i}{3\,\text{coſ.}\,i^4} - \frac{5\,\text{ſin.}\,i}{8\,\text{coſ.}\,i^2} - \tfrac{5}{8} Z + \frac{3Z}{4\,\text{coſ.}\,i^2} \right).$$

Mais $\frac{-2b\,\text{coſ.}\,I^2}{g} = a - \frac{aa}{2k} \left(\frac{\text{ſin.}\,I}{\text{coſ.}\,I^2} + l\,\text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2} I) \right) + \frac{a^3}{4fk} \left(\frac{\text{ſin.}\,I}{\text{coſ.}\,I^4} + \frac{3\,\text{ſin.}\,I}{2\,\text{coſ.}\,I^2} + \tfrac{3}{2}\, l\,\text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2} I) \right)$

& les grandeurs E, F doivent être telles que, i devenant I, x & y s'évanouiſſent. On aura donc à peu près :

$$a = \frac{-2b\,\text{cof.}\,I^2}{g} + \frac{2bb}{ggk}\left(\text{fin.}\,I\,\text{cof.}\,I^2 + \text{cof.}\,I^4\,l\,\text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}I)\right) + \frac{2b^3}{g^3fk}\left(\text{fin.}\,I\,\text{cof.}\,I^2 + \tfrac{3}{2}\,\text{fin.}\,I\,\text{cof.}\,I^4 + \tfrac{3}{2}\,\text{cof.}\,I^6\,l\,\text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}I)\right)$$

ce qui donne la valeur de a (41).

Si par ce moyen on veut avoir la portée EF; on fera $y = 0$ ce qui, outre la valeur de $i = I$, en donnera encore une autre qui aura le ſigne — ; mais l'équation ſera tellement compliquée, qu'on ne peut découvrir la valeur de cet angle que par des approximations qui conduiſent elles-mêmes à des calculs très-pénibles. Si l'on parvient à trouver l'angle i, il faudra en ſubſtituer la valeur dans celle de x; & ce qui en réſultera pour x ſera la portée que l'on cherche.

On pourroit auſſi, par une autre approxi-

---

(41) L'approximation qu'on emploie ici conſiſte à mettre, dans l'équation précédente, $\frac{-2b\,\text{cof.}\,I^2}{g}$ à la place de a dans les fractions $\frac{aa}{2k}$, $\frac{a^3}{4fk}$; c'eſt-à-dire que l'on ſuppoſe les deux derniers termes du ſecond membre de cette équation à peu près égaux entre eux ; d'où l'on tire une valeur de a où ces deux termes ſont conſervés, parce que, par la ſubſtitution, ils prennent le même ſigne.

mation, trouver une équation entre x & y, telle que celle-ci :

$$y = x \text{ tang. I} - \frac{gxx}{4b \text{ cof. I}^2} - \frac{gx^3}{12bk \text{ cof. I}^3} + \frac{g^2 x^4 \text{ fin. I}}{96bbk \text{ cof. I}^4} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{x^3}{6fk \text{ cof. I}^3} + \frac{gx^4 \text{ fin. I}}{16bfk \text{ cof. I}^4}$$
$$- \frac{gx^4}{48bkk \text{ cof. I}^4}$$
$$- \frac{x^4}{24fkk \text{ cof. I}^4}$$

Lorſque la réſiſtance eſt très-petite, cette équation exprime aſſez bien la nature de la courbe. On trouvera enſuite la portée EF pour la valeur de la racine x de l'équation ſuivante :

$$0 = \text{fin. I} - \frac{gx}{4b \text{ cof. I}} - \frac{gxx}{12bk \text{ cof. I}^2}$$
$$- \frac{x^2}{6fk \text{ cof. I}^2} \text{ \&c.}$$

d'où l'on tire la portée $\text{EF} = \frac{4b \text{ fin. I cof. I}}{g} - \frac{16bb \text{ fin. I}^2 \text{ cof. I}}{3ggk} - \frac{32b^3 \text{ fin. I}^2 \text{ cof. I}}{3g^3 fk}$.

Comme dans le cas préſent g differe très-peu de l'unité, on aura $\text{EF} = 2b \text{ fin. } 2\text{I} \left(1 - \frac{4b \text{ fin. I}}{3k} - \frac{8bb \text{ fin. I}}{3fk}\right)$, où l'on a, comme ci-deſſus, $k = \frac{4}{3} nc$, & $f = 2h$; on aura donc :

$$\text{EF} = 2b \text{ fin. } 2\text{I} \left(1 - \frac{b(b+h) \text{ fin. I}}{nch}\right)$$

$2b$ *fin.* 2 I exprime la portée lorſqu'il n'y a point de réſiſtance ; d'où l'on voit que la portée dans le vuide eſt à la portée dans l'air comme 1 eſt à $1 - \frac{b(b+h) \text{ fin. I}}{nch}$. Donc, plus l'angle I eſt grand, plus ſera grande la différence entre la

portée dans un milieu résistant, & la portée dans le vuide (42).

Il suit aussi de là que ce n'est point sous l'angle de 45 degrés qu'on obtient la plus grande portée ; mais, à cause de la résistance de l'air, sous un angle un peu moindre. Si l'on veut avoir l'angle de la plus grande portée, on trouvera par la méthode ordinaire $\textit{sin.}\ I = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{b(b+h)}{8nch}$.

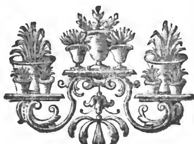
Au reste, ces formules ne peuvent servir que dans le cas où nc seroit beaucoup plus grand que b ; or dans toutes les épreuves de l'Auteur b est toujours plus grand que nc ; les approximations dont nous venons de faire usage, ne peuvent donc servir dans aucun des exemples rapportés par l'Auteur. C'est pourquoi nous sommes obligés de rompre le fil de cette recherche, que nous abandonnons d'autant plus volontiers à l'Auteur, qu'il s'est engagé de traiter ce sujet dans un autre Ouvrage (43).

---

(42) On peut avec raison soupçonner de l'erreur dans cette valeur des portées, puisqu'elle conduit à une fausse conséquence : car dans les deux cas extrêmes d'une projection horizontale & d'une projection verticale, il est clair que la différence entre les portées dans l'air & dans le vuide est nulle, l'une & l'autre étant alors = o. Il y a donc un angle de projection tel qu'il en resulte un *maximum* pour cette différence, qui de là doit diminuer, soit qu'on augmente cet angle, soit qu'on le diminue.

(43) Si les calculs dans lesquels le savant Commentateur s'est engagé dans cette Remarque, sont une preuve de l'étendue de son génie, leurs résultats font voir en même temps combien il est difficile de déterminer la trajectoire des projectiles, dans l'hypothese de la résis-

tance proportionnelle à $\frac{1}{2} v + \frac{v^2}{2g}$. M. Robins n'a point rempli les engagemens qu'il a pris à cet égard, & M. Euler, en revenant sur le même sujet dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, année 1753, renonce à cette formule, pour s'en tenir à la loi d'une résistance proportionnelle au quarré des vitesses, en admettant toutefois la force absolue de la résistance plus grande que suivant la théorie newtonnienne. Quoi qu'il en soit, si la connoissance de la courbe de projection est de quelqu'utilité dans certaines circonstances, on peut heureusement s'en passer pour le tir du canon, parce que ce tir ne s'exécutant presque jamais que sous des angles très-aigus, on peut toujours connoître, à peu près, la longueur de la courbe décrite par le boulet, & faire usage de ce qui a été dit dans la premiere Remarque de cette Proposition, ou dans la note qui la suit.



PROPOSITION VII.

OUTRE la force de la pesanteur par laquelle les Boulets & les Bombes sont attirés vers le centre de la terre, ces projectiles sont encore entraînés par une autre force, à droite ou à gauche du plan vertical.

Si la pesanteur étoit la seule cause des variations que les projectiles éprouvent dans leur mouvement, leurs déviations vers la droite ou la gauche du but seroient toujours proportionnelles aux distances de ce but à l'arme à feu; or l'expérience prouve le contraire. Car si à la distance de 30 pieds le boulet s'écarte d'un pouce de sa premiere direction, la déviation à 300 pieds ne sera pas de 10 pouces, & encore moins de 30 pouces à la distance de 900 pieds. Il n'y a personne sans doute qui, avec un peu d'usage des armes à feu, ne se soit apperçu que les coups sont d'autant plus incertains, que le but est plus éloigné; la raison est que la ligne décrite par un boulet, a une courbure dans le sens latéral, aussi bien que dans le sens vertical, de maniere que les déviations augmentent dans un plus grand rapport que les éloignemens du but. On peut considérer la ligne droite qui marque la direction du canon, comme tangente de la courbe décrite par le boulet, le point touchant étant à la bouche du canon; il est évident que ces deux lignes, à l'instar de toutes les courbes, s'écartent l'une de l'autre, à mesure qu'elles s'éloignent de leur commune origine,

plus que ne feroient deux lignes droites à la même distance.

Mais afin de convaincre ceux mêmes qui ne connoissent point cette matiere par leur propre expérience, je rapporterai quelques épreuves qui dissiperont tous les doutes.

Je pris un canon de fusil, portant des balles de $\frac{3}{4}$ de pouce de diametre, je le fixai de maniere que sa direction ne pût point varier, & pour être bien assuré de sa solidité, je tirai seize coups de suite contre un plateau d'un pied & demi en quarré, & éloigné de 180 pieds, une seule balle n'atteignit pas le plateau. Le canon étant ainsi fixé, je diminuai la charge, afin que les ébranlemens étant moindres, le canon fût moins exposé à changer de direction, & je tirai à un but éloigné de 2280 pieds. La balle s'écarta quelquefois de 300 pieds de sa premiere direction, tantôt à droite, tantôt à gauche. Le mouvement dans le sens vertical, n'étoit pas moins incertain : la balle tomboit à terre quelquefois à 600 pieds en deçà, quelquefois à 600 pieds au delà du but ; quoique dans toutes ces épreuves je ne me fusse apperçu d'aucun changement dans la direction du canon.

La vérité de notre Proposition est donc incontestable, n'étant pas possible que toutes ces variations dans le mouvement de la balle aient lieu, si la ligne qu'elle décrit n'étoit point courbée dans le sens latéral aussi bien que dans le sens vertical.

COROLLAIRE.

Puisque l'expérience ne laisse aucun doute sur la réalité de la double courbure du chemin

parcouru par une balle ; il eſt tout naturel de demander quelle peut être la cauſe d'un mouvement auſſi varié, & ſi différent de tous ceux que nous avons conſidérés juſqu'à préſent ? Je réponds que ces déviations proviennent néceſſairement d'une force qui agit obliquement ſur la balle, & que cette force n'eſt autre choſe que la réſiſtance de l'air. Mais comment la réſiſtance de l'air peut-elle exercer un effort dirigé obliquement ſur le mouvement d'une ſphere ? Cela peut venir quelquefois de la forme irréguliere de la ſphere, mais le plus ordinairement d'un mouvement de rotation de la ſphere ſur elle-même. Car lorſqu'un pareil mouvement accompagne le mouvement progreſſif, néceſſairement chaque partie de la ſurface doit frapper l'air ſuivant une direction bien différente de ce qu'elle feroit, s'il n'y avoit point de mouvement de rotation ; & l'obliquité de la réſiſtance de l'air occaſionnée par cette cauſe, ſera d'autant plus grande, que ce mouvement ſera plus rapide par rapport au mouvement progreſſif.

Je termine ici tout ce que je m'étois propoſé de démontrer dans ce Traité touchant la force de la poudre, & la réſiſtance de l'air. Mais comme il n'eſt pas moins important dans l'Artillerie, & ſur-tout pour battre en breche, de connoître la réſiſtance qu'un boulet rencontre en pénétrant dans les corps ſolides, j'ajouterai encore une Propoſition ſur cette matiere, qui trouve ici naturellement ſa place.

PREMIERE REMARQUE.

Tout corps ſolide eſt ſuſceptible de deux eſpeces de mouvement: l'un par lequel il eſt tranſporté d'un lieu dans un autre, & qu'on appelle mouvement progreſſif; l'autre eſt un mouvement giratoire, ou de rotation, par lequel un corps tourne ſur lui-même ou autour d'un axe qui paſſe par ſon centre. Il n'eſt ici queſtion que des corps durs, car pour ceux qui ſont mous ou flexibles, ils peuvent être mus d'une infinité d'autres manieres. Un corps dur peut donc avoir un mouvement progreſſif, ou un mouvement de rotation, ou tous les deux enſemble: dans le premier cas, toutes les parties du corps ont la même viteſſe, & ſuivant des directions paralleles entre elles, c'eſt ce mouvement, le plus ſimple de tous, qu'un corps conſerve toujours ſuivant la même direction, à moins qu'il ne ſoit altéré par quelque force extérieure; c'eſt là une des premieres loix de la méchanique, & l'on en peut conclure, que ſi un corps reçoit du changement, ſoit dans ſa viteſſe, ſoit dans ſa direction, ce ſera néceſſairement l'effet d'une puiſſance extérieure.

En ſecond lieu, un corps peut, ſans ſortir de ſa place, avoir un mouvement de rotation ſur lui-même: dans ce mouvement l'axe reſte immobile, & toutes les parties du corps tournent autour avec des viteſſes d'autant plus grandes, qu'elles en ſont plus éloignées. Lorſque l'axe eſt immobile, on ne ſauroit mieux comparer ſon mouvement qu'à celui d'un corps monté ſur un tour à tourner; ce n'eſt pas qu'un pareil mou-

vement puiſſe avoir lieu, ſans que l'axe de rotation ſoit appuyé par aucun de ſes points; mais alors deux conditions ſont néceſſaires : il faut que l'axe de mouvement paſſe par le centre de gravité du corps, & que les forces centrifuges de toutes les parties faſſent équilibre entre elles; avec ces deux conditions, il arrive encore que ce mouvement reſte uniforme, ſelon la loi dont nous venons de parler, tant qu'il n'eſt point altéré par quelque cauſe extérieure. Mais s'il n'y a point équilibre entre les forces centrifuges des parties du corps, le mouvement de rotation continuera à la vérité d'avoir lieu, mais l'axe lui-même deviendra alors mobile, & la rotation ſe fera ſucceſſivement autour d'un nouvel axe. Lorſqu'un corps ſphérique eſt homogene dans toutes ſes parties, il y aura toujours équilibre entre leurs forces centrifuges, ſi l'axe de rotation paſſe par le centre de gravité, le mouvement ſera conſtamment égal & uniforme, & pourra s'exécuter ſur une ligne quelconque, paſſant par le centre de gravité.

Le mouvement progreſſif & le mouvement de rotation ſont indépendans l'un de l'autre : ils peuvent ſe rencontrer dans le même corps ſans que l'un nuiſe à l'autre, & l'un des deux peut être altéré par une cauſe extérieure, ſans qu'il en réſulte à l'autre le moindre changement. Le globe terreſtre nous préſente un exemple d'un double mouvement : ce globe tourne autour du ſoleil & parcourt ſon orbite dans une année, pendant qu'il tourne ſur lui-même, faiſant en 24 heures une révolution ſur ſon axe. On obſerve encore un autre mouvement dans

la terre, par lequel son axe rétrograde tous les ans d'environ 50 secondes.

Si l'on imprime donc à un corps un mouvement progressif, & en même temps un mouvement de rotation autour d'un axe passant par le centre de gravité, de maniere que les forces centrifuges de toutes les parties de ce corps le tiennent mutuellement en équilibre ; ces deux mouvemens subsisteront toujours & sans altération, tant qu'ils ne seront point troublés par quelque cause extérieure.

Ce que nous avons principalement à examiner ici, c'est la nature des forces qui communiquent au corps soit le mouvement progressif, soit celui de rotation, ou tous les deux ensemble.

Lorsque la direction de la force motrice passe par le centre de gravité du corps, elle ne lui imprime qu'un mouvement progressif ; dans ce cas, si c'est un corps en repos qui est sollicité à se mouvoir, son mouvement aura la même direction que la force motrice ; & si cette force agit sur un corps déjà en mouvement, sa vîtesse sera augmentée ou diminuée, ou sa direction changée, selon que la force motrice sera dirigée dans le même sens que celle du mobile, ou dans un sens opposé, ou obliquement à son mouvement. Mais si, outre le mouvement progressif, le corps en a aussi un de rotation, celui-ci ne recevra aucune altération d'une force motrice dont la direction passe par le centre de gravité du corps.

Si la direction de la force motrice ne passe point par le centre de gravité du corps, son

mouvement progreſſif ſera changé de la même maniere que ſi cette force eût agi ſuivant une direction parallele & paſſant par le centre de gravité; il en réſultera de plus un mouvement de rotation ſur un axe qui paſſe par ce centre perpendiculairement au plan dans lequel eſt le même centre & la direction de la force. Mais s'il exiſtoit déjà un mouvement de rotation ſur cet axe ou ſur un autre, ce mouvement ſeroit augmenté ou ralenti, & dans ce dernier cas, l'axe de rotation ſeroit auſſi changé.

Deux ou pluſieurs forces agiſſent-elles enſemble ſur un corps? On trouvera de la maniere ſuivante quels ſont les mouvemens & les autres accidens qui en doivent réſulter: qu'on ſe repréſente d'abord toutes ces forces comme ſi elles agiſſoient ſuivant les directions paralleles qui paſſent par le centre de gravité du corps, la réſultante de ces forces fera connoître le mouvement progreſſif & les changemens qu'il peut éprouver. S'il arrive donc que toutes ces forces s'entre-détruiſent, le mouvement progreſſif ne ſouffrira point d'altération. A l'égard du mouvement de rotation, on cherchera les mouvemens de toutes ces forces relativement à leurs directions réelles, en multipliant chacune d'elles par ſa diſtance au centre de gravité; en les comparant enſemble, on trouvera avec quelle force & dans quel ſens le corps tournera ſur lui-même; de là on déterminera le mouvement de rotation du corps, ſoit que ces forces l'aient produit, ſoit qu'exiſtant déjà, elles n'aient fait que le changer.

Ces principes bien établis, nous allons examiner la nature du mouvement que la poudre imprime

à un boulet, & les changemens que la résistance de l'air peut produire dans ce mouvement : nous supposerons d'abord le boulet parfaitement rond, & son centre de gravité confondu avec le centre de figure ; dans ce cas la force impulsive de la poudre sera non-seulement dirigée par le centre de gravité du boulet, mais encore suivant l'axe de la piece ; le boulet ne recevra donc qu'un mouvement progressif suivant cette direction. Il n'y a donc ici d'autre mouvement que celui que nous avons considéré jusqu'à présent avec l'Auteur, & par conséquent la poudre ne produit aucun mouvement de rotation. Mais comme le boulet se meut dans la cavité du canon, qu'il y éprouve un frottement dont la direction ne passe point par son centre, mais est tangente de sa surface, il en devroit résulter un mouvement de rotation ou de roulement, si le bouchon qu'on met ordinairement sur le boulet n'étoit point un obstacle à ce mouvement ; car ce bouchon étant appliqué avec force sur le boulet, il doit diminuer le frottement & l'empêcher de rouler. Le boulet s'élance donc dans l'air par un mouvement progressif, & n'est plus exposé qu'à l'action de la pesanteur, & à la résistance de l'air. La direction de la pesanteur passe toujours par le centre de gravité du boulet, cette force n'a donc d'effet que sur le mouvement progressif, dont elle change la direction, en tant qu'elle entraine le boulet vers le centre de la terre. La force de la résistance est aussi dirigée dans ce cas par le centre de gravité du boulet, & n'est pas plus capable que l'autre de produire un mouvement de rotation ; sa direction étant d'ailleurs la même que celle du boulet, elle

ne doit pas le faire ſortir du plan vertical dans lequel le mouvement a commencé.

Il eſt donc évident que, ſi le boulet eſt parfaitement rond, ſi les centres de gravité & de figure ne ſont qu'un même point, le mouvement eſt préciſément tel que notre théorie l'exige; c'eſt-à-dire que le boulet doit ſe mouvoir dans un plan vertical, ſans s'écarter ni à droite ni à gauche; & ſi le but eſt dans ce plan vertical, on ne pourra le manquer qu'en tirant trop haut ou trop bas; s'il n'y eſt pas, le boulet donnera à droite ou à gauche, & s'éloignera d'autant plus du but, qu'il ſera plus éloigné du canon, l'angle formé par le plan vertical & la droite menée du canon au but reſtant le même; de maniere que ſi la balle donne une fois, par exemple, à la droite du but, tous les autres coups porteront auſſi à droite, s'ils ſont tirés ſous la même direction du canon & à la même diſtance du but, quand même on augmenteroit ou diminueroit la charge. Mais, ſi le canon étant fixé de maniere que ſa direction ne puiſſe pas varier, les coups portent tantôt à droite, tantôt à gauche du but, & qu'à de grandes diſtances du canon, les déviations de la balle augmentent dans un plus grand rapport que ces diſtances; l'Auteur conclut avec raiſon que la ligne parcourue n'eſt point dans un plan vertical, & qu'elle forme par conſéquent une courbe à double courbure.

Conſidérons maintenant un boulet qui, quoique parfaitement rond, n'ait pas ſon centre de gravité au même point que le centre de figure; tant que ce boulet reſte expoſé dans le canon à la force impulſive de la poudre, la direction

de cette force paſſe par le milieu du boulet, & eſt parallele à l'axe de la piece; le boulet ne recevra donc que le ſeul mouvement progreſſif, comme dans le cas précédent; & ſi cette direction paſſe auſſi par le centre de gravité du boulet, il n'y aura point de mouvement de rotation. Mais ſi le centre de gravité ſe trouve hors de la ligne ſuivant laquelle l'action de la poudre eſt dirigée, le boulet recevra en même temps un mouvement de rotation autour de ce centre. Mais comme, par ce même mouvement, le point du milieu eſt auſſi-tôt porté dans la partie oppoſée au centre de gravité, il doit enfin être détruit, de façon que le mouvement de rotation excité dans le boulet ne pourra être permanent. Il en eſt de même lorſque le boulet ſorti du canon ſe meut en plein air: car alors la direction de la réſiſtance paſſe par le milieu du boulet, & comme elle eſt directement oppoſée à ſon mouvement, il en réſultera au mouvement progreſſif le même changement que dans le cas précédent. Outre cela le boulet recevra encore un mouvement de rotation autour de ſon centre de gravité : par ce mouvement le centre de figure eſt d'abord porté en arriere, il revient enſuite en avant, mais ſe trouvant alors expoſé en ſens contraire à la réſiſtance de l'air, le mouvement de rotation doit s'affoiblir petit à petit, & ceſſer enfin totalement; ainſi le boulet ne conſervera plus que ſon mouvement progreſſif, ayant le centre de figure conſtamment derriere le centre de gravité. Il ſuit de là que la moitié la plus peſante du boulet, celle où ſe trouve le centre de gravité, eſt enfin toujours en avant, & qu'elle eſt ſuivie par l'autre

moitié plus légere ; ce qui eſt pleinement confirmé par l'obſervation. Il arrive auſſi, dans ce cas, que le boulet ne s'écarte point du plan vertical dans lequel le mouvement a commencé. Ainſi la déviation, quand elle a lieu, ne peut venir que d'un défaut de ſphérité dans la figure du boulet.

Lorſque le boulet n'eſt pas parfaitement rond, il peut arriver que la direction de la force de la poudre non-ſeulement ne paſſe pas par le centre de gravité du boulet, mais qu'elle ne ſoit même pas parallele à l'axe de la piece. Dans le premier cas, le boulet prendra un mouvement de rotation, mais qui ceſſera bientôt, comme on l'a fait voir pour le cas précédent. Si la force de la poudre n'eſt point dirigée parallelement à l'axe de la piece, le boulet ne ſera point pouſſé ſuivant la direction de cet axe, mais ſuivant celle de la force impulſive ; & ce dernier cas eſt digne de remarque par les circonſtances que l'Auteur en rapporte : le boulet ballotté dans l'ame de la piece y exercera de grands efforts contre les parois. C'eſt le cas que nous avons examiné plus haut, lorſque nous avons fait voir qu'une piece, quoique forée en ligne droite, étoit expoſée à crever par le ſeul choc du boulet ; ce qui prouve d'autant mieux la néceſſité de n'employer que des boulets parfaitement ronds.

Mais lorſqu'un boulet, qui n'eſt pas exactement ſphérique, eſt ſorti du canon, outre que ſa direction s'écarte déjà de l'axe de la piece, la réſiſtance de l'air produit encore dans ſon mouvement des variations toutes différentes de ce qu'elles feroient ſi ſa rondeur étoit parfaite.

Car puiſque l'effet de la réſiſtance de l'air dépend de la forme extérieure des corps; non-ſeulement il eſt très-poſſible que la direction de cette réſiſtance differe de celle du mouvement du boulet : mais il ſera même très-rare que ces deux directions concourent enſemble. Il peut donc arriver qu'un boulet ſoit pouſſé de bas en haut ou de haut en bas, par l'action de la réſiſtance de l'air; & de là il eſt aiſé de concevoir comment un boulet peut toucher terre à une diſtance plus ou moins grande qu'un autre, quoique tirés avec la même piece, la même direction & la même charge de poudre. Mais ſi la direction de la réſiſtance de l'air ne tombe point dans le plan vertical, où le boulet a commencé ſon mouvement, le boulet ſera chaſſé à droite ou à gauche; & ſi le boulet ne tourne point ſur ſon centre, cette force s'écartera de plus en plus de ce plan vertical, & cette déviation ſera d'autant plus grande que le but eſt plus éloigné. Je veux dire qu'à une diſtance double, la déviation ne ſera pas ſeulement double ou triple, comme il arriveroit, ſi à la moitié de ſa courſe, le boulet ceſſoit d'être pouſſé latéralement ; mais elle deviendra quadruple ſi la force déviatrice eſt conſtante. Obſervons néanmoins que, comme cette force diminue avec la vîteſſe du boulet, la déviation ne ſera pas tout-à-fait quadruple à une diſtance double, mais elle ſera toujours plus que triple. La vraie cauſe de l'incertitude des coups ne vient donc que du défaut de ſphéricité des boulets, & le mouvement de rotation n'y a aucune part, comme notre Auteur le prétend. Au contraire, ſi dans ſa courſe le boulet tour-

noit sur lui-même, il faudroit que la force résistante fût dirigée tantôt à droite, tantôt à gauche ; & l'on voit bien qu'alors il pourroit arriver que les coups ne seroient pas plus incertains à une grande distance qu'à une moindre. Quoi qu'il en soit de cette incertitude du tir, dont parle l'Auteur, il est à présumer qu'elle ne doit pas être aussi considérable pour les boulets de canon : l'Auteur ne s'est servi que de balles de plomb dans ses épreuves ; & non-seulement il est rare que ces balles soient exactement sphériques, elles sont aussi très-sujettes à changer de figure en passant dans le canon de fusil (44) ; il n'en est pas de même des boulets de fer, leur forme est communément plus parfaite, & la matiere dont ils sont composés moins susceptible de changement ; il paroît suivre de là que les coups de canon doivent être beaucoup moins incertains que les coups de mousquet. Il en faut excepter les carabines rayées, & cela précisément pour les raisons que l'Auteur donne en général de l'incertitude des corps,

(44) Ce défaut de sphéricité des balles de plomb, le changement de figure occasionné dans le canon par la chaleur & la pression du fluide élastique de la poudre, & dont la nature du métal rend ces balles très-susceptibles, outre la déviation de leur mouvement, pourroient bien aussi être la cause de l'augmentation considérable de la résistance indiquée par les expériences de M. Robins. Si cela étoit ainsi, comme il y a tout lieu de le présumer, la théorie de notre Auteur se rapprocheroit beaucoup de celle de Newton. M. Hutton, dont les expériences ont été faites avec des boulets de fer de près de deux pouces de diametre, auroit pu dissiper tous nos doutes à ce sujet : il est à regretter qu'il ne les ait point dirigées dans la vue de connoître les effets de la résistance de l'air.

Car puisque les balles tirées avec un canon carabiné reçoivent un mouvement de rotation qui accompagne continuellement le mouvement progressif, chaque effort de la résistance, par lequel la balle est sollicitée à se détourner de sa direction, soit dans le sens vertical, soit dans le sens latéral, sera détruit par l'action qu'elle exerce le moment d'après dans le sens opposé. L'imperfection de la figure de la balle s'oppose donc moins à la justesse du coup, que s'il n'y avoit point de mouvement de rotation (45).

---

(45) Nos deux Auteurs sont d'un sentiment opposé sur la cause de la déviation des projectiles : l'un attribue cet effet au mouvement de rotation du boulet, & à la résistance de l'air ; l'autre prétend que cette résistance n'y a aucune part. S'ils eussent considéré, le premier pour appuyer son opinion, le second pour rectifier la sienne, que l'air, à cause du mouvement progressif, est plus dense au devant du mobile qu'en arriere, la cause de cette déviation n'eût souffert aucune difficulté. Il est même étonnant que cette circonstance, dont M. Euler fait mention à la fin de la quatrieme Remarque sur la Proposition I. de ce Chapitre, lui ait échappé ici : mais avant de prononcer, consultons l'expérience.

Aux épreuves faites à la Fere au mois d'Octobre 1771, un boulet de 24 lancé sous l'angle de 25 degrés eut, à cinq toises de la bouche du canon, une déviation de 10 lignes vers la droite, déviation que M. le Chevalier d'Abboville observa par le moyen que j'avois employé pour connoître l'angle de départ du boulet, & dont j'ai parlé dans la note 36. Si donc la courbe de projection eût été dans un même plan vertical, le boulet qui fut porté à 1766 toises, auroit dû, à cette distance, s'être écarté de quatre toises six pouces à droite de la direction du canon : il fut au contraire porté de l'autre côté, & tomba à 108 toises à gauche de cette direction.

Un autre boulet tiré sous le même angle, s'écarta à cinq toises du canon de $2\frac{1}{2}$ lignes sur la gauche; & à la

distance de 1805 toises, il tomba à 18 toises, & sur la droite de la direction du canon.

Enfin un troisieme boulet, qui s'écarta d'abord à la même distance de 12 $\frac{1}{2}$ lignes à gauche, alla tomber à 118 toises, & sur la droite de la direction de la piece ; la portée étant de 1910 toises.

Une singularité bien remarquable que présentent ces trois coups d'épreuve, est que le boulet, ayant commencé sa course en s'écartant d'un côté de la direction du canon, se soit ensuite constamment porté au côté opposé, pour s'en écarter d'autant plus, que sa premiere déviation à cinq toises a été plus grande. Voyons quelles sont les conséquences qu'on en peut tirer.

La premiere déviation indique qu'au sortir du canon, il s'est fait un choc du boulet contre les parois intérieures de la bouche, du côté droit, quand il s'est écarté à gauche, & du côté gauche, lorsqu'il s'est porté sur la droite de la direction du canon ; d'où l'on sent bien qu'a dû naître un mouvement de rotation dans le boulet. Le sens de ce mouvement, si c'étoit le seul qne le boulet eût reçu, seroit, en ne considérant que la partie antérieure, de gauche à droite, quand le boulet a rencontré la droite du canon, & de droite à gauche, dans le cas contraire. L'air ne peut avoir quelque part à la déviation du boulet, qu'autant que, par sa résistance, il s'oppose au mouvement de rotation ; & comme ce fluide est plus dense en avant du mobile qu'en arriere, à cause du mouvement progressif, sa résistance doit faire plus d'effet sur la partie antérieure, que sur la postérieure ; c'est donc dans le sens opposé à la rotation de la partie antérieure, que l'air auroit dû repousser le boulet, c'est-à-dire, dans le sens de sa premiere déviation : or il est arrivé précisément le contraire dans les trois coups d'épreuve que je viens de rapporter ; donc les déviations observées ne pourroient nullement être attribuées à la résistance de l'air, si le boulet n'avoit point reçu un autre mouvement de rotation, que celui qu'a dû produire le choc au sortir du canon.

Mais, n'est-il pas à présumer qu'avant d'arriver à la bouche du canon, & avant le dernier choc, le boulet avoit déjà reçu un mouvement de rotation très-rapide, par l'action immédiate de la poudre ? Cette conjecture devient une réalité, quand on considere que le boulet

placé dans le canon pose sur la parois inférieure de l'ame ; que, par conséquent, la résultante de toutes les impulsions de la poudre doit passer au dessus de son centre, ce qui, joint au frottement du boulet sur le bas des parois de l'ame, doit nécessairement produire un mouvement de rotation autour d'un axe horizontal ; mouvement d'autant plus rapide, que, dans ces épreuves, il n'étoit point gêné par le bouchon de fourrage, puisqu'il n'y en avoit point au devant du boulet. Cet axe de rotation change de situation par le dernier choc : d'horizontal qu'il étoit d'abord, il devient oblique en s'inclinant du côté où se fait le dernier choc : c'est-à-dire, que le mouvement de rotation qui étoit dirigé du haut en bas, doit l'être hors du canon de gauche à droite, lorsque le dernier choc s'est fait à gauche, & de droite à gauche, lorsqu'il s'est fait à droite. Donc, dans le premier cas, la résistance de l'air a dû porter le boulet vers la gauche, & dans le second, vers la droite, comme cela est effectivement arrivé. D'où l'on voit qu'en suivant & examinant tous les mouvemens que le boulet est dans le cas de recevoir, jusqu'à ce qu'il soit hors de la piece, l'explication du phénomene en question ne souffre plus aucune difficulté ; celle que je viens d'en donner est pleinement justifiée, par toutes les circonstances observées dans les trois coups d'épreuve rapportés ci-dessus.

SECONDE REMARQUE.

Nous avons donc découvert la vraie cause de l'incertitude du tir, en ne l'attribuant qu'à la seule figure des projectiles ; l'Auteur, dans cette Proposition, ne donne sur ce sujet que des notions très-imparfaites & peu propres à l'éclaircir. Car lorsque le boulet est exactement sphérique, quand même le centre de gravité ne seroit pas le même que le centre de figure, sa déviation latérale ne sauroit être sensible ; & s'il arrive que le boulet donne à droite ou à gauche du but, c'est que la piece aura été mal pointée, &

que

que son axe n'étoit point dans le plan vertical, passant par le but & le point de projection. Si le boulet n'est pas parfaitement rond, nous avons fait voir qu'il devoit souvent s'écarter de sa premiere direction, & passer d'autant plus loin à côté du but, que ce but est plus éloigné du canon. Nous avons démontré aussi que la rotation du boulet, lorsqu'un pareil mouvement a lieu, contribuoit moins à augmenter sa déviation qu'à la diminuer, & à rendre les coups moins incertains. L'Auteur ne paroît pas être de ce sentiment; mais outre ce qui a déjà été dit, nous pouvons encore faire voir qu'un mouvement de rotation dans le boulet influe peu sur les effets de la résistance de l'air, & qu'ils sont à peu près les mêmes que si le boulet ne tournoit point sur son axe. Nous conviendrons cependant avec l'Auteur, que par un tel mouvement il doit arriver quelque changement tant à la vitesse avec laquelle chaque point du boulet choque l'air, qu'à l'angle sous lequel se fait le choc; mais cela n'empêche pas que la direction de la force du choc ne soit toujours perpendiculaire à la surface du boulet; d'ailleurs, puisque cette force du choc est constamment proportionnelle au quarré de la vitesse, multiplié par le quarré du sinus de l'angle sous lequel se fait le choc, ce sinus sera presque toujours d'autant plus ou moins grand, que la vitesse sera diminuée ou augmentée, ce qui ne changera presque rien à la force du choc, que le boulet ait un mouvement de rotation, ou qu'il n'en ait pas. Cette compensation a lieu à peu près, lorsque la figure du boulet ne differe pas sensiblement de la sphérique, & que l'axe

du mouvement de rotation paſſe très-près du centre de figure. Mais ſi la ſphéricité du boulet eſt parfaite, & ſi ſon axe de rotation paſſe par le centre de figure, l'effet de la réſiſtance eſt abſolument le même, ſoit qu'il y ait un mouvement de rotation ou qu'il n'y en ait pas. Il ſuffira donc de démontrer ce dernier cas, d'où il ſuivra néceſſairement que quand il s'en faudra peu que la figure du boulet ne ſoit ſphérique, & que l'axe de rotation ne paſſe par le centre de figure, l'effet de la réſiſtance ne ſera point ſenſiblement changé par le mouvement de rotation. Conſidérons donc un boulet parfaitement ſphérique, qui, outre le mouvement progreſſif, en ait auſſi un de rotation ſur un axe paſſant par le centre de figure; il n'importe que cet axe ſoit conſtant ou variable. Il eſt à remarquer d'abord que, ſi le boulet n'avoit point de mouvement progreſſif, il n'éprouveroit d'autre réſiſtance de la part de l'air, que celle qui réſulteroit d'un léger frottement, & ſi peu conſidérable, qu'on pourroit ſans erreur n'y avoir aucun égard. Car dans ce cas le centre de figure eſt en repos, & comme toutes les parties de la ſurface en ſont toujours également éloignées, leur mouvement ne peut produire de choc réel contre les particules de l'air. Ces particules ne ſeront miſes en mouvement que parce qu'elles ſeront entraînées par un frottement très-foible, elles ne pourront donc exercer aucun effort contre le mouvement de rotation du boulet. S'il exiſte un mouvement progreſſif, on pourra ſe repréſenter la choſe comme s'il n'y en avoit point, & que l'air vînt choquer le boulet avec la même viteſſe, car dans les deux cas,

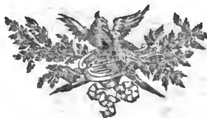
l'effort réſultant du choc des particules de l'air doit être le même. Imaginons donc un boulet dont le centre de figure ſoit immobile, ſuppoſons qu'il tourne autour de ce centre, & que l'air vient le choquer avec une viteſſe donnée: ſi l'on ſuppoſe dans la fig. 26, que le plan du papier touche le boulet au point A, & que l'air rencontre ce point ſuivant la direction PA, on exprimera la viteſſe de l'air par la droite PA, on abaiſſera du point P la perpendiculaire PQ ſur le plan touchant, & on tirera la droite AQ. Cela poſé, ſi le boulet n'avoit point de mouvement de rotation, la force du choc de l'air contre le point A, ſeroit proportionnelle au quarré de la droite PA, qui exprime la viteſſe de l'air, multiplié par le quarré du ſinus de l'angle PAQ formé par la direction PA de l'air, & la ſurface du boulet au point A.

Le ſinus de l'angle PAQ pouvant être exprimé par $\frac{PQ}{PA}$, la force du choc de l'air contre le point A, ſera comme $\overline{PA}^2 \times \frac{\overline{PQ}^2}{\overline{PA}^2}$, c'eſt-à-dire, comme $\overline{PQ}^2$. Mais ſi le boulet tourne ſur ſon centre qu'on ſuppoſe immobile, le point A ne pourra prendre de mouvement que ſuivant une direction qui ſe trouve dans le plan touchant, repréſenté ici par le plan du papier ſur lequel la figure eſt tracée. Soit donc A*a* la direction du mouvement du point A, & ſoit pris A*a* d'une grandeur telle qu'on ait PA eſt à A*a*, comme la viteſſe de l'air eſt à la viteſſe du point A. Pour déterminer enſuite l'action que l'air en mouvement, ſuivant la direction PA, exerce

ſur le point A mu ſuivant la direction Aa, il n'y a qu'à ſuppoſer ce point A en repos, & donner à l'air ſa vîteſſe en ſens contraire : on menera à cet effet du point P la droite Pp égale & parallele à Aa ; l'effet de l'air ſur le point A ſera alors le même, que, ſi ce point, étant en repos, l'air venoit le choquer dans la direction pA avec une vîteſſe exprimée par la droite pA. Il faudra donc multiplier le quarré de cette vîteſſe, ou de la droite pA, par le quarré du ſinus de l'angle formé par la direction pA & le plan qui touche le boulet en A. On trouvera cet angle en menant du point p la perpendiculaire pq ſur ce plan touchant, ou en menant Qq égale & parallele à Aa ; & comme la droite Qq eſt auſſi égale & parallele à Pp, il s'enſuit que pq eſt égale & parallele à PQ, & le ſinus de l'angle pAq, ſous lequel l'air rencontre le point A, ſera exprimé par $\frac{pq}{pA}$; ainſi, la force du choc ſera comme $\overline{pA}^2 \times \frac{\overline{pq}^2}{\overline{pA}^2}$, c'eſt-à-dire, comme $\overline{pq}^2$; mais $pq = PQ$, donc l'air agit ſur le point A en mouvement, comme ſur le même point en repos ; & quoique le mouvement du point A occaſionne quelque changement, tant à la vîteſſe pA de l'air choquant, qu'à l'angle pAq, ſous lequel ſe fait le choc ; ces changemens ſe compenſent de maniere qu'il en réſulte toujours la même force. Ce que nous venons de démontrer pour le point A, s'applique également à tous les autres points de la ſurface du boulet, & confirme d'une maniere inconteſtable ce que nous avons avancé,

Digitized by Google

qu'un boulet parfaitement ſphérique rencontre la même réſiſtance de la part de l'air, ſoit qu'il tourne ſur ſon centre, ſoit qu'il ne tourne pas. S'il arrive donc que le boulet prenne dans le canon même un mouvement de rotation, le mouvement progreſſif ne ſera pas plus altéré par la réſiſtance de l'air que s'il n'y avoit point de rotation ; & puiſque cela eſt ainſi pour un boulet parfaitement rond, on peut conclure que ſi, dans un boulet qui ne le ſeroit pas exactement, le mouvement de rotation produit quelque changement à l'effet de la réſiſtance de l'air, ce changement ſe réduit à très-peu de choſe, & peut être regardé comme nul. Il n'eſt donc aucun cas où le mouvement progreſſif d'un boulet puiſſe être ſenſiblement altéré par le mouvement de rotation.



PROPOSITION VIII.

LORSQUE des Boulets de même diametre & de même poids, viennent frapper avec des vîteſſes différentes des corps ſolides de même eſpece, & s'y enfoncent, les enfoncemens ſeront, à peu près, comme les quarrés des vîteſſes ; & la réſiſtance de ces corps, eu égard à l'enfoncement du boulet, ſera toujours la même.

LA premiere partie de cette Propoſition a été prouvée par un grand nombre d'expériences. Une balle de plomb de $\frac{3}{4}$ de pouce de diametre, ayant été tirée avec une vîteſſe d'environ 1700 pieds par ſeconde, contre un plateau de bois d'orme, elle s'y enfonça de quatre pouces & demi à cinq pouces & demi. Une pareille balle tirée avec une vîteſſe de 730 pieds par ſeconde, s'enfonça dans le même bois d'un pouce ſeulement, & l'enfoncement équivaloit un cylindre de même diametre & d'une hauteur de $\frac{7}{8}$ de pouce. Enfin, la vîteſſe de la balle étant de 400 pieds par ſeconde, elle ne s'enfonçoit ordinairement que de la moitié de ſon diametre, ce qui forme un cylindre d'un quart de pouce de hauteur.

Les quarrés de ces trois vîteſſes ſont entre eux, à peu près, comme 55, 10 & 3; ſi l'on prend donc 5 pouces pour l'enfoncement moyen produit par la plus grande viteſſe ; on trouve que, ſelon le rapport des quarrés, les enfoncemens produits par les deux autres viteſſes auroient dû être de $\frac{10}{11}$ & $\frac{3}{11}$ de pouce, ce qui

differe très-peu de $\frac{7}{8}$ & $\frac{1}{4}$ trouvés par l'expérience. Au reste, on ne doit pas s'attendre à une plus grande conformité entre l'expérience & la théorie, si l'on fait attention à l'inégale cohésion des parties du bois, & au changement que le choc produit dans la figure des balles.

Puisque les enfoncemens sont proportionnels aux quarrés des vîtesses avec lesquelles les balles choquent le bois, on en conclura l'uniformité de la résistance du bois, de même qu'on déduit l'uniformité de l'action de la pesanteur sur les corps, de ce que les espaces parcourus sont proportionnels aux quarrés des vîtesses acquises; & c'est aussi ce que l'on peut conclure du mouvement d'un corps projeté verticalement de bas en haut: car dans ce cas les hauteurs, auxquelles ce corps peut atteindre, sont comme les quarrés des vîtesses qui lui sont imprimées.

REMARQUE.

Un boulet tiré contre un corps inébranlable, contre un mur, par exemple, ou contre un rempart, réjaillira ou s'enfoncera, jusqu'à ce que sa vîtesse soit entiérement détruite par la résistance. Pour qu'il soit réfléchi avec toute sa vîtesse, il faut qu'il soit, ainsi que le corps choqué, parfaitement élastique; c'est-à-dire, qu'ils doivent l'un & l'autre reprendre leur premiere figure, après y avoir souffert quelque changement par le choc. Si une telle élasticité n'existe pas dans les deux corps, le boulet s'enfoncera dans le rempart, & le terme où cessera son action, sera celui de l'anéantissement de sa vîtesse.

Digitized by Google

Dans l'un & l'autre cas, le boulet fait une impreſſion : dans le premier, elle ſe rétablit après le choc; dans le ſecond, l'impreſſion ſubſiſte : c'eſt ce qui conſtitue la différence entre les corps à reſſort, & les corps ſans reſſort. On ne connoît point dans la nature de corps dont le reſſort ſoit parfait, ni qui en ſoit entiérement dénué, & c'eſt entre ces deux extrêmes que doivent être rangés tous les corps naturels, relativement à leurs différens degrés d'élaſticité. Quoi qu'il en ſoit, notre objet, dans le cas que nous examinons ici, doit ſe borner à conſulter l'expérience : elle nous apprend qu'il n'y a point de corps, quel qu'en ſoit le degré d'élaſticité, qui ne conſerve une marque de l'impreſſion qu'il a reçue par le choc, & qu'il n'y en a pas non plus qui ne ſe rétabliſſe en partie dans ſa premiere forme. Ce que nous avons principalement à conſidérer, c'eſt l'enfoncement d'une balle dans une piece de bois, ou d'un boulet dans un rempart : comme cet enfoncement ſe fait ſans que la balle ni le boulet ſoient ſenſiblement réfléchis, c'en eſt aſſez pour nous autoriſer à négliger dans ces corps la force élaſtique, dont l'effet eſt abſolument inſenſible.

Lorſqu'on tire un boulet contre un tel ſolide, non-ſeulement il y fait une impreſſion, mais il y pénetre ordinairement juſqu'à une certaine profondeur ; & la réſiſtance qu'il y rencontre ralentit ſon mouvement peu à peu, & le détruit enfin totalement. Pour connoître cet enfoncement, il faudroit pouvoir déterminer la réſiſtance que ces corps oppoſent à la déſunion de leurs parties, & qu'ils exercent contre le boulet qui les pénetre. Il eſt évident que pour

s'enfoncer d'une certaine profondeur dans du bois ou dans de la terre, le boulet doit avoir une force d'autant plus grande, qu'il doit s'y enfoncer plus avant ; car l'élasticité ne faisant point d'effet sensible dans ce cas, le boulet rencontrera la même résistance à une certaine profondeur, qu'au commencement. Ainsi cette résistance peut être regardée comme une force constante & uniforme, qui ne dépend point de la vîtesse du boulet ; & en cela cette force est semblable à celle de la pesanteur, laquelle agissant sur un corps jeté verticalement de bas en haut, détruit à chaque instant un même degré de la vîtesse de ce corps, quelle que soit celle qui lui a été imprimée. L'intensité de cette force dépend, premiérement, de la solidité de la matiere dont est composé l'obstacle contre lequel on tire ; & en second lieu, de la grandeur de l'ouverture faite par le boulet, laquelle est proportionnelle au quarré du diametre du boulet. Si l'on suppose donc ce diametre $= c$, & la fermeté de l'obstacle $= f$; la force de résistance sera proportionnelle à ccf. Nous supposerons que cette force est équivalente au poids d'une colonne d'eau, dont la hauteur $=$ f, & le diametre égal à celui du boulet, soit de plus la pesanteur spécifique du boulet à celle de l'eau, comme n est à 1, b la hauteur relative à la vîtesse avec laquelle le boulet choque l'obstacle, & $\sqrt{v}$ la vîtesse qui lui reste après s'être enfoncé d'une quantité $= x$. Puisque le poids du boulet est égal à celui d'une colonne d'eau dont la hauteur $= \frac{2}{3} nc$, la résistance sera au poids du boulet, comme f est à $\frac{2}{3} nc$, ou comme $\frac{3f}{2nc}$ est à 1. On aura donc,

pendant que le boulet parcourt l'espace infiniment petit dx, l'équation $dv = \frac{-3fdx}{2nc}$; donc $v = b - \frac{3fx}{2nc}$; mais le boulet continue de s'enfoncer jusqu'à ce que sa vîtesse soit détruite, c'est-à-dire, jusqu'à ce que $v = 0$; ainsi l'enfoncement total étant $= a$, on aura $b = \frac{3af}{2nc}$ & $a = \frac{2ncb}{3f}$. La profondeur de la cavité faite par le boulet, est donc comme le poids du boulet multiplié par le quarré de sa vîtesse, & divisé par le produit fait du quarré du diametre du boulet, & de la solidité de l'obstacle. Donc si l'on tire des boulets égaux contre le même obstacle, les enfoncemens seront proportionnels aux quarrés de leurs vîtesses; cette conséquence se trouvant confirmée par l'expérience, on ne peut douter de la justesse des principes que nous avons employés. On peut aussi conclure que si, contre le même obstacle, on tire des boulets de même matiere, de differentes grosseurs & avec la même vîtesse, les enfoncemens seront proportionnels à leurs diametres; que, par conséquent, les plus gros boulets, non-seulement font des ouvertures plus larges dans un rempart, toutes choses égales d'ailleurs, mais qu'ils pénetrent à de plus grandes profondeurs. On voit aussi que si l'on connoît par l'expérience l'enfoncement d'un boulet dans un rempart, son diametre & sa vîtesse étant connus, on en pourra déduire la valeur de la quantité f, qui exprime la solidité de la matiere de ce rempart, & déterminer par l'expérience la tenacité des différentes matieres qu'on peut employer à la construction des remparts.

L'Auteur a tiré ses balles contre un plateau de bois d'orme, ainsi nous pouvons déterminer la valeur de f pour cette espece de bois : le diametre des balles étant de $\frac{3}{4}$ de pouce, on a $c = 0,0625$ pieds anglois, & ces balles étant de plomb, on a $n = 11,35$; la viteſſe de 1700 pieds par seconde donne $b = 44900$ pieds anglois ; enfin l'enfoncement étoit de cinq pouces ou de 0,4166 pieds anglois. Ainsi, l'équation $f = \frac{2ncb}{3a}$ se change en celle-ci : $f = \frac{22,7 \times 0,0625 \times 44900}{1,25} = 50960$. Cette valeur de f étant trouvée pour le bois d'orme, il est aisé de connoître, dans tous les cas, de combien une balle doit s'enfoncer dans le même bois. Si l'on veut maintenant comparer la solidité du bois d'orme avec la tenacité des terres d'un rempart, supposons qu'un boulet ait pénétré de 15 pieds dans ce rempart, ce boulet étant de fer, on a $n = 7,82$; que son diametre soit $= 0,46$ pieds anglois, & sa vîteſſe de 1300 pieds par seconde, b sera $= 27800$; &, à cause de $a = 15$, on aura $f = 4441$. Donc la solidité du bois d'orme est à la tenacité des terres d'un rempart, à peu près comme 11 est à 1 : & l'on pourroit par la même méthode, & à l'aide de l'expérience, déterminer la solidité de toute autre matiere.

FIN.

NOUVELLES EXPÉRIENCES

FAITES A WOOLWICH,

Pour connoître les vîteſſes initiales des Boulets, rapportées dans les Tranſactions philoſophiques, année 1778, n°. 111.

CES expériences ont été faites par M. Hutton, pendant l'été de 1775, en préſence de pluſieurs Membres de la Société militaire. On y a employé un pendule à l'imitation de celui de M. Robins, mais plus long, plus peſant, & capable de recevoir des balles d'un plus gros calibre. Deux pendules ont ſervi ſucceſſivement à ces expériences : le poids du premier étoit de 328 livres, & ſa longueur totale de 102 $\frac{1}{2}$ pouces ; le ſecond, long de 101 pouces, peſoit 552 livres.

On s'eſt ſervi d'un canon de bronze, dont l'ame avoit 2,16 pouces de diametre à la bouche, & dans toute ſa partie cylindrique, juſqu'au logement de la poudre, où ce diametre diminuoit, & n'étoit dans le fond que de 2,08 pouces ; de maniere que le plus gros boulet de fer que ce canon pouvoit recevoir, peſoit 19 $\frac{1}{2}$ onces *avoir du poids*. On a quelquefois employé des boulets de plomb du poids d'environ 1 $\frac{3}{4}$ ℔. & d'autres fois des cylindres peſant près de trois

livres. La longueur de l'ame étoit de 42,6 pouces, ou d'environ 10 $\frac{1}{2}$ calibres.

La poudre étoit de l'espece que l'on fabrique pour le service du gouvernement; les charges de deux, quatre & huit onces, renfermées dans des gargousses de flanelle, plus ou mois refoulées, comme il est rapporté à chaque expérience, mais sans bourre au devant.

Quoique la théorie du pendule de M. Robins soit suffisamment connue, nous ne laisserons pas de rapporter celle de M. Hutton, parce qu'il en déduit une formule de la vîtesse initiale du boulet, qui n'exige qu'un calcul très-simple.

Regle pour calculer la vîtesse du Boulet.

Soit le poids du boulet . . . . b
Le poids du pendule entier . . . . . p
La distance de son centre de gravité à l'axe de mouvement . . . . g
La distance du centre d'oscillation au même axe . . . . h
La distance du point frappé . . . . k
La vîtesse de ce point après le choc z
La vîtesse du boulet avant le choc . . v
La corde de l'arc mesurée par le ruban c
Le rayon de cet arc, ou la longueur du pendule . . . . r

L'effet du choc par le boulet est comme $\frac{gh}{kk}$; ou bien $kk : gh :: p \; \frac{pgh}{kk}$ = au poids d'un corps qui, placé à l'endroit du choc, recevroit la même vîtesse par le choc que le point frappé du pendule. Nous avons donc deux corps, b &

$\frac{ghp}{kk}$, dont le premier, avec une vîtesse v, choque le second en repos, ensorte qu'après le choc, ces corps se meuvent uniformément avec la vîtesse commune z. Or on sait que, dans ce cas, $b : b + \frac{ghp}{kk} :: z : v$; on a donc $z = \frac{bkkv}{bkk + ghp}$. Mais le poids du pendule étant augmenté de celui du boulet, la place du centre d'oscillation doit être changée, & par la propriété connue de ce centre, nous trouvons $\frac{bkk+ghp}{bk+gp}$ = à sa distance de l'axe. Nommons H cette distance du centre d'oscillation de la masse composée du pendule & du boulet, alors z étant la vîtesse du point dont la distance est k, on aura cette proportion $k : H :: z : \frac{zH}{k} = \frac{bkv}{bk+gp}$, pour la vîtesse de ce nouveau centre d'oscillation.

D'un autre côté, puisque $\frac{cc}{2r}$ est le sinus verse de l'arc dont la corde est c & le rayon r, on a $r : H :: \frac{cc}{2r} : \frac{cc}{2rr} \times \frac{bkk+ghp}{bk+gp}$ = au sinus verse de l'arc décrit par le centre d'oscillation; nommons-le V; V est donc la hauteur verticale de la descente du centre d'oscillation, & la vîtesse acquise de cette hauteur se trouve aisément, en faisant $\sqrt{16\frac{1}{12}} : \sqrt{V} :: 32\frac{1}{6} : \frac{8,02c}{r\sqrt{2}} \times \sqrt{\frac{bkk+ghp}{bk+gp}}$ = à la vîtesse du centre d'oscillation déduite de la corde de l'arc actuellement décrit.

Nous avons donc deux expressions indépendantes l'une de l'autre de la vitesse de ce centre, ce qui donne la relation entre les différentes quantités qui entrent dans cette question, par l'équation $\frac{bkv}{bk+gp} = \frac{8,02\,c}{r\sqrt{r}} \times \sqrt{\frac{bkk+ghp}{bk+gp}}$; d'où l'on tire $v = \frac{8,02\,c}{bkr\sqrt{2}} \sqrt{(bk+gp)(bkk + ghp)}$ pour l'expression de la vitesse que le boulet avoit, au moment qu'il a frappé le pendule.

Cette formule peut être réduite à une forme plus simple, plus propre à la pratique, & suffisamment exacte. Pour cela tirons la racine du facteur $(bk + gp)(bkk + ghp)$, & faisons-la égale à $\sqrt{h} \times \left(pg + bk \times \frac{h+k}{2h}\right)$, qui, dans le cas présent, ne differe pas de $\frac{1}{100000}$ de la véritable racine. Mais puisque $bk \times \frac{h+k}{2h}$ n'est ordinairement que la 300$^{me.}$ ou 400$^{me.}$ partie de pg, & que bk ne differe de $bk \times \frac{h+k}{2h}$ que de sa 80$^{me.}$ ou 100$^{me.}$ partie ; il s'ensuit que $pg + bk$ n'est qu'environ la 20000$^{me.}$ ou 30000$^{me.}$ partie de $pg + bk \times \frac{h+k}{2h}$; on peut donc faire $v = 8,02\,c\sqrt{\tfrac{1}{2}h} \times \frac{pg+bk}{bkr}$ sans erreur sensible. De plus, si l'on met g à la place de k dans le dernier terme bk, on aura enfin $v = 8,02\,cg\sqrt{\tfrac{1}{2}h} \times \frac{p+b}{bkr} = 5,672\,cg\sqrt{h} \times \frac{p+b}{bkr}$. Cette formule est d'un calcul facile dans toutes les occasions, & suffisamment exacte,

puisque l'erreur qui en peut résulter ne va qu'à $\frac{1}{5000}$. Il est à observer que les quantités c, g, k, r peuvent être évaluées en quelle mesure on voudra, pourvu qu'elle soit la même pour chacune; mais h doit l'être en pieds, parce que la formule est adaptée à des pieds.

Comme les balles restent dans le pendule pendant le cours des expériences, leur poids ajouté à chaque coup change le poids total du pendule, & la position des centres de gravité & d'oscillation; il est donc à propos que les quantités p, g, h soient corrigées à chaque coup dans la formule de la vitesse. Les valeurs successives de p seront toujours $p + b$, c'est-à-dire que p doit être corrigé par l'addition continuelle de b. La distance g du centre de gravité sera corrigée, en prenant toujours $g + \frac{k-g}{p+b} b$, ou $g + \frac{k-g}{p} b$ pour les valeurs successives de g; c'est-à-dire que g sera corrigé en ajoutant à chaque coup $\frac{k-g}{p} b$ à la valeur de g du coup précédent. Enfin h sera corrigé en prenant successivement $\frac{pgh+bkk}{pg+bk}$ pour ses nouvelles valeurs, ou bien en ajoutant $\frac{k-h}{pg+bk} bk$, ou $\frac{k-h}{p} b$ à la valeur précédente de h : de maniere que les trois corrections à faire pour chaque coup d'épreuve, consistent à ajouter b à la valeur de p,

$\frac{k-g}{p} b$ à celle de g,

$\frac{k-h}{p} b$ à celle de h.

Avant de procéder aux expériences, il ne sera

ſera pas inutile de faire mention de trois cauſes apparentes d'erreurs, qu'on n'a point fait entrer dans la formule de la vîteſſe, & d'examiner ſi elles peuvent ſenſiblement influer ſur les réſultats. C'eſt la pénétration du boulet dans le bois du pendule; la réſiſtance que l'air oppoſe à ſon mouvement, & le frottement des tourillons de l'axe, chacune de ces cauſes ſemble devoir retarder le mouvement du pendule. Le principe ſur lequel notre regle eſt fondée, ſuppoſe que le mouvement du boulet eſt communiqué au pendule dans un inſtant indiviſible, ce qui n'eſt pas exact dans le cas préſent, parce que cette force eſt tranſmiſe pendant la durée du temps que le boulet met à s'enfoncer dans le bois : mais comme cet enfoncement ſe fait avant que le pendule ſoit écarté d'un $\frac{1}{10}$ de pouce de la ſituation verticale, & qu'il ne met ordinairement qu'un $\frac{1}{200}$ de ſeconde pour monter de cette quantité, cet effet peut être regardé comme imperceptible, & négligé dans ces expériences.

La ſeconde force retardatrice, ou la réſiſtance de l'air contre le bas du pendule, eſt évidemment preſqu'inſenſible, ſi l'on conſidere qu'elle n'agit que contre une vîteſſe d'environ trois pieds par ſeconde, contre une ſurface de 20 à 24 pouces en quarré, & contre une maſſe de 4 à 500 livres.

La troiſieme cauſe ne mérite pas plus de conſidération : car, outre qu'on a pris toutes les précautions pour rendre ce frottement le moins ſenſible qu'il eſt poſſible, le peu d'effet qui en peut réſulter eſt à peu près contrebalancé par l'effet qu'il produit à la diſtance du centre d'oſ-

cillation. Ce centre a été déterminé par des vibrations actuelles du pendule, lesquelles ayant été un peu ralenties par le frottement de l'axe, ont dû augmenter la distance de ce centre, de maniere que les autres parties de notre formule étant multipliées par $\sqrt{h}$, ou la racine de cette distance, qui est proportionnelle au temps d'une vibration, il est évident que l'effet du frottement d'une part est contraire à celui qu'il produit de l'autre, & que ce n'est que la différence de ces deux effets, qui est la seule cause efficace de la résistance, que, par cette raison, on peut regarder comme nulle, ou presqu'insensible.

On a donc cru pouvoir négliger ces causes générales d'erreurs dans les principes de nos expériences, & porter toute notre attention sur les erreurs accidentelles qui peuvent survenir dans leurs différens procédés.

Premiere suite d'expériences faites le 13 Mai 1775, le temps étant clair & sec.

Le poids du pendule étoit $p = 328$ ℔; la distance du centre de gravité $g = 72$ pouces; la distance du centre d'oscillation $h = 88$ pouces $= 7\frac{1}{3}$ pieds, & la longueur totale du pendule $r = 102\frac{1}{2}$ pouces : le pendule étoit éloigné de la bouche du canon de 29 pieds.

Ordre des coups.	Charges.	Diam. des boulets.	Long. des charges.	Valeurs de *k*.	Valeurs de *b*.	Valeurs de *p*.	Valeurs de *g*.	Valeurs de *c*.	Viteſſes par ſecondes
	onces.	pouces.	pouces.	pouces.	livres.	livres.	pouces.	pouces.	pieds.
1	2	1,98		92,5	1,094	328,0	72,0	13,0	456
2	2	1,98		92,5	1,094	329,1	72,1	17,8	628
3	2	1,98	3,15	91,6	1,094	330,2	72,2	18,1	647
4	2	1,97	3,15	91	1,078	331,3	72,3	17,6	646
5	2	1,97	3,15	90,5	1,078	332,3	72,3	16,3	604
6	2	1,96	3,15	92,4	1,063	333,4	72,4	16,2	598
7	4	1,97	4,5	92	1,078	334,4	72,5	24,0	882
8	4	1,96	4,5	90,5	1,063	335,5	72,5	25,0	950

Les vîteſſes rapportées dans la derniere colonne de cette Table, ont été calculées d'après la formule $v = 5,672\, cg \sqrt{h} \times \frac{p+b}{bkr}$.

Toutes ces vîteſſes s'accordent aſſez bien entre elles, à l'exception de la premiere, qui eſt d'environ un quart plus petite que les autres obtenues de la même charge : cette irrégularité provient ſans doute de quelqu'accident échappé à l'obſervation. Les valeurs de p & g ont été corrigées comme il a été dit ci-deſſus ; mais l'on n'a point changé celle de h (de $7\frac{1}{3}$ pieds), parce que cette correction ne pouvoit produire ſur la vîteſſe qu'une différence d'un ou deux pieds, &, pour cette raiſon, on l'a auſſi négligée dans les expériences ſuivantes.

La vîteſſe moyenne des 2, 3, 4, 5 & 6$^{me.}$ coups eſt 625 ; celle des deux derniers eſt 916 ; donc la vîteſſe imprimée par deux onces de poudre, eſt à celle qu'ont donné quatre onces comme 625 : 916 :: 1 : 1,46. Mais le poids moyen des cinq balles chaſſées par deux onces eſt 17,3 onces, & celui des deux autres eſt 17,125, le rapport des charges étant comme 1 eſt à 2 ; ce qui donne 1 : 1,42, peu différente de 1 : 1,46 pour la raiſon compoſée de la directe ſous-doublée des charges, & de l'inverſe ſous-doublée des poids des boulets : les vîteſſes ſont donc entre elles comme les racines des charges, diviſées par les racines des poids des boulets. La charge n'a été preſſée que d'un coup de refouloir.

Seconde suite d'expériences faites le 3 Juin 1775, le temps étant clair, sec, mais venteux.

Plusieurs de ces expériences sont douteuses, comme on le voit par leur peu d'uniformité : le ruban indicateur de la premiere vibration du pendule étoit agité par le vent, & glissoit trop librement dans la petite machine de cuivre faite pour l'assujettir.

Les quatrieme & cinquieme coups ont été tirés avec des boulets longs, d'une forme sphérico-cylindrique, ou composée d'un cylindre terminé à chacune de ses bases par une demi-sphere, la longueur étant double du diametre.

Au quatrieme coup, le boulet long frappa le pendule par son côté ; son entrée dans le bois avoit la forme de sa section longitudinale, l'axe étant placé verticalement.

Le dernier boulet entra obliquement dans le bois : il y a apparence qu'en pénétrant dans le bloc, son extrêmité antérieure a rencontré un boulet qui y étoit déjà logé, puisque cette extrêmité étoit un peu applatie par le côté : d'où l'on peut conclure que les boulets longs ont toujours un mouvement de rotation fort irrégulier.

Le poids, la longueur, les centres de gravité & d'oscillation, étoient les mêmes qu'aux premieres expériences : on en avoit tiré tous les boulets, & bouché les trous avec des chevilles.

Digitized by Google

Ordre des coups.	Charges.	Diam. du boulet.	Long. des charges.	Valeurs de *k*.	Valeurs de *b*.	Valeurs de *p*.	Valeurs de *g*.	Valeurs de *c*.	Vitesses par secondes
	onces.	pouces.	pouces.	pouces.	livres.	livres.	pouces.	pouces.	pieds.
1	2	2,08	2,85	88 $\frac{1}{2}$	1,219	328,0	72,0	24,3	800
2	2	2,08	2,85	89	1,219	329,2	72,1	30,5	1003
3	2	2,08	2,85	93 $\frac{1}{2}$	1,219	330,4	72,1	30,0	943
4	2	2,08	3,35	92 $\frac{1}{2}$	2,906	331,6	72,2	57,0	767
5	2	2,08	3,35	93	2,906	334,5	72,4	54,0	731

La premiere viteſſe de cette Table eſt ſi petite par rapport aux deux ſuivantes, que l'on peut y ſoupçonner de l'irrégularité, & la négliger. La viteſſe moyenne entre la ſeconde & la troiſieme eſt 973, & entre les deux dernieres, 974 ; donc la viteſſe des boulets de 19 $\frac{1}{2}$ onces eſt à celle des boulets longs peſant 46 $\frac{1}{2}$ onces, comme 1,3 eſt à 1. Mais la raiſon inverſe ſous-doublée des poids des boulets, eſt comme 1,54 à 1 ; la viteſſe des boulets plus peſans eſt donc plus grande, qu'il ne réſulte du rapport inverſe de la racine de leurs poids. Mais ces expériences étoient trop douteuſes, comme on l'a obſervé, pour qu'on dût s'attendre à une plus grande exactitude.

Ce qu'il y a de plus remarquable, c'eſt que ces dernieres expériences ont donné, avec deux onces de poudre, une viteſſe moyenne de 973 pieds; tandis que la même charge n'avoit donné précédemment qu'une viteſſe de 625 pieds, quoique les boulets fuſſent plus peſans que ceux de la premiere ſuite d'épreuves dans le rapport de 19 à 17. Cette différence vient évidemment du vent du boulet, moindre cette fois qu'il ne l'étoit le 13 Mai. Ce ſeroit donc un avantage réel que le diametre des boulets différât moins du calibre des pieces, qu'il n'eſt preſcrit par les réglemens actuels. Il eſt poſſible auſſi que cette différence vienne en partie de quelqu'inégalité dans la poudre : celle qu'on a employée pour cette ſuite d'expériences, étoit le reſte d'un fond de barril. Enfin, une partie de cet effet peut auſſi être attibuée à ce que, dans ces dernieres expériences, les charges de poudre ont été plus refoulées qu'aux premieres.

Troisieme suite d'expériences du 12 Juin 1775, le temps étant clair, sec & calme.

On avoit ce jour-ci, $p = 324$; $g = 71,4$, & le reste comme ci-devant.

Ordre des coups.	Charges.	Diam. des boulets.	Long. des charges.	Valeurs de *k*.	Valeurs de *b*.	Valeurs de *p*.	Valeurs de *g*.	Valeurs de *c*.	Vitesses par secondes
	onces.	pouces.	pouces.	pouces.	livres.	livres.	pouces.	pouces.	pieds.
1	2	2,080	2,85	94	1,219	324,0	71,4	23,0	698
2	2	2,036	2,85	94	1,141	325,2	71,5	24,5	799
3	2	2,045	2,85	$93\frac{1}{2}$	1,156	326,4	71,6	22,0	715
4	4	2,062	4.	$92\frac{1}{4}$	1,188	327,5	71,7	27,3	880
5	4	2,036	4.	$93\frac{1}{2}$	1,141	328,7	71,7	35,0	1163
6	4	2,045	4.	$93\frac{1}{2}$	1,156	329,9	71,8	33,0	1087

Ici le poids moyen des boulets eſt 18 $\frac{2}{3}$; la vîteſſe moyenne avec la charge de deux onces eſt 738, & 1043 avec quatre onces : ces vîteſſes ſont dans le rapport de 1 à 1,414, qui eſt préciſément le rapport ſous-doublé des quantités de poudre.

Le pendule employé aux trois premieres ſuites d'expériences, ayant été fort endommagé par le grand nombre de boulets qu'il avoit reçus, on en a ſubſtitué un autre pour les ſuivantes.

Ce ſecond pendule étoit compoſé d'un cube de bois d'orme bien ſain, ayant près de deux pieds de côté, ſuſpendu à une barre de fer placée verticalement au deſſus du centre de la face ſupérieure du cube : de là cette barre étoit partagée en deux branches, qui enveloppoient le cube en paſſant ſur le milieu des deux faces latérales, & venoient ſe joindre ſur la face inférieure ; ces deux branches étoient fixées en différents endroits avec des pointes de fer. Deux feuilles épaiſſes de plomb couvroient les faces antérieures & poſtérieures contre leſquelles on tiroit les boulets, tant pour empêcher le bois d'éclater, que pour augmenter le poids du pendule; elles étoient aſſujetties avec deux bandes de fer, qui entouroient horizontalement le cube, l'une vers le haut, & l'autre vers le bas.

Ce pendule étoit, à tous égards, ſi parfait, & toutes les circonſtances des épreuves ſuivantes ont été ſi ſcrupuleuſement obſervées, que l'on peut compter avec confiance ſur les réſultats qu'elles ont donnés. Et comme on s'eſt ſervi de boulets de plomb le premier jour, & de boulets de fer le jour ſuivant, les autres cir-

conſtances étant les mêmes, on eſt en état de découvrir la loi du rapport des poids, relativement à celui des charges de deux, quatre & huit onces.

Quatrieme ſuite d'expériences du 20 Juillet 1775; par un temps ſerein.

La poudre étoit un mêlange de pluſieurs eſpeces, faites pour le ſervice du gouvernement; les balles de plomb, les charges de deux, quatre & huit onces, alternativement. Le poids du pendule $p = 552$ ℔; $r = 101$ pouces; $g = 78$ pouces, & h, comme au premier pendule, $= 7\frac{1}{3}$ pieds.

Digitized by Google

Ordre des coups.	Charges.	Diam. des boulets.	Long. des charges.	Valeurs de *k*.	Valeurs de *b*.	Valeurs de *p*.	Valeurs de *g*.	Valeurs de *c*.	Vitesses par secondes
	onces.	pouces.	pouces.	pouces.	livres.	livres.	pouces.	pouces.	pieds.
1	2	2,021	2,85	90	1,766	552,0	78,0	14,8	612
2	4	2,021	4,4	87	1,766	553,8	78,0	20,5	879
3	8	2,031	7,1	87	1,797	555,5	78,1	27,5	1164
4	2	2,026	2,85	90	1,781	557,3	78,1	15,0	622
5	4	2,026	4,4	88	1,781	559,1	78,1	20,5	871
6	8	2,032	7,1	92	1,797	560,9	78,2	28,5	1154
7	2	2,021	2,85	89,8	1,766	562,7	78,2	14,3	605
8	4	2,026	4,4	91,3	1,781	564,5	78,2	21,0	870
9	8	2,026	7,1	87	1,781	566,3	78,3	26,8	1169

Les réſultats de ces expériences ſont d'une uniformité frappante : la vîteſſe moyenne de 2 onces eſt de 613 pieds ; celle de 4 onces 873, & celle de 8 onces 1162 pieds : ces vîteſſes moyennes ſont dans le rapport des nombres 1, 1,424 & 1,9 ; or, les racines quarrées de 2, 4 & 8 ſont entre elles comme 1 : 1,414 & 2 ; la différence ne tombe donc principalement que ſur le dernier nombre, & doit être attribuée en partie au poids moyen des boulets qu'on a tirés avec la charge de huit onces ; cette moyenne étant plus grande que celle du poids des boulets tirés avec chacune des deux autres charges : elle eſt de $28\frac{2}{3}$ onces, au lieu que, pour les autres, elle n'eſt que de $28\frac{1}{3}$. La raiſon inverſe ſous-doublée de ces moyennes eſt comme 1 : 1,006 ; ſi l'on augmente dans le même rapport le nombre 1,9 correſpondant à la vîteſſe réſultante de huit onces, on aura 1,91, qui eſt encore plus petit que 2 de 0,09 : il s'en faut donc de $\frac{1}{22}$ qu'on ait la raiſon ſous-doublée des charges. Cette erreur de $\frac{1}{22}$ vient évidemment de trois cauſes, ſavoir : 1°. la moindre longueur que ces boulets avoient à parcourir dans le canon ; on voit par la quatrieme colonne que le boulet avec la charge de huit onces, étoit placé de trois à quatre pouces plus près de la bouche du canon, qu'avec les charges de deux & quatre onces : 2°. le fluide élaſtique produit par l'inflammation de huit onces de poudre, ayant plus de vîteſſe que celui qui ſe développe d'une moindre charge, il doit s'en échapper une plus grande quantité par le vent du boulet avec la charge de huit onces, qu'avec

celles de deux & quatre onces : 3°. la troisieme cause est la quantité de poudre non enflammée plus grande dans ce cas, que dans celui d'une moindre vîtesse : car puisque le boulet a plus de vîtesse & moins d'espace à parcourir dans le canon, il en sortira plutôt; & si l'inflammation est successive, comme on ne peut en douter, quoique le temps en soit très-court, il restera une plus grande quantité de poudre non enflammée, que si la vîtesse étoit moindre; & cette quantité non enflammée sera d'autant plus grande, que le volume de poudre enflammée au premier instant est plus considérable. Quoi qu'il en soit, c'est principalement à la premiere & à la troisieme cause qu'il faut attribuer la différence dont il s'agit; la seconde y a peu de part, parce que l'effet résultant de la plus grande vîtesse avec laquelle le fluide s'échappe par la lumiere & le vent du boulet, est en partie compensé par la moindre durée de son action.

On voit aussi, d'après ces réflexions, combien est petite la quantité de poudre qui est chassée, sans avoir pris feu dans quelques cas de nos expériences, & dans tous, la prodigieuse vîtesse de l'inflammation : car quoique le temps que le boulet met à parcourir l'ame du canon, lorsque la charge est de huit onces, differe très-peu de la moitié du temps pendant lequel il est poussé par la charge de deux onces, il est évident que, durant cette moitié, il doit s'enflammer près de quatre fois autant de poudre.

Cinquieme ſuite d'expériences du 21 Septembre 1775, faites par un temps clair, mais un peu venteux.

Les boulets étoient de fer; la poudre de la même qualité qu'aux dernieres épreuves ; le poids du pendule $p = 553$ livres ; $r = 101$ pouces ; $g = 78\frac{1}{8}$; $h = 7,065$ pieds, le pendule faiſant 68 vibrations en 100 ſecondes.

Ordre des coups.	Charges.	Diam. des boulets.	Long. des charges.	Valeurs de *k*.	Valeurs de *b*.	Valeurs de *p*.	Valeurs de *g*.	Valeurs de *c*.	Viteſſes par ſecondes
	onces.	pouces.	pouces.	pouces.	livres.	livres.	pouces.	pouces.	pieds.
1	2	2,062	3.	88,3	1,188	553,0	78,1	11,4	702
2	4	2,062	4,3	88,3	1,188	554,2	78,1	17,3	1068
3	8	2,062	6,7	91,0	1,188	555,5	78,2	23,6	1419
4	2	2,070	3.	90,7	1,201	556,8	78,2	11,4	682
5	4	2,080	4,3	90,7	1,221	558,1	78,2	17,3	1020
6	8	2,064	6,7	90,7	1,190	559,4	78,2	22,3	1352
7	2	2,060	3.	91,0	1,184	560,6	78,3	11,4	695
8	4	2,058	4,3	90,0	1,180	561,9	78,3	15,3	948
9	8	2,049	6,7	90,0	1,163	563,1	78,3	22,9	1443
10	2	2,047	3.	88,3	1,160	564,3	78,3	10,9	703
11	4	2,037	4,3	88,3	1,142	565,5	78,4	14,8	973
12	8	2,036	6,7	88,3	1,140	566,6	78,4	20,6	1360
13	2	2,034	3.	92,0	1,137	567,8	78,4	11,4	725
14	4	2,034	4,3	92,0	1,137	569,0	78,4	15,0	957
15	8	2,031	6,7	93,7	1,131	570,1	78,5	22,5	1412

La moyenne des vîtesses résultantes de la charge de deux onces, est 701 ; de 4 onces, 993, & de huit onces, 1397. Ces vîtesses sont entre elles comme les nombres 1 ; 1,416 ; & 1,993, qui approchent beaucoup de la raison sous-doublée des charges, ou de 1 ; 1,414, & 2. On voit que la plus grande différence tombe encore sur le dernier nombre qui répond à la plus grande vîtesse. Cette différence deviendra un peu plus grande, si l'on compare les poids des boulets : le poids moyen des boulets tirés aux charges de deux & de quatre onces est 1,174 ; & avec huit onces, la moyenne est 1,162 ; diminuant donc le nombre 1,993 dans le rapport inverse sous-doublé de ces poids moyens, il deviendra 1,985, qui est plus petit que 2 de 0,015, ou de sa 133me. partie. Ce défaut doit être attribué aux mêmes causes qu'on a examinées à l'occasion des expériences précédentes.

Comparons maintenant les vîtesses correspondantes des deux dernieres suites d'épreuves.

Celles de la derniere suite sont :

710, 993, 1397.

Celles de la précédente sont :

613, 873, 1162.

Les deux premiers nombres, c'est-à-dire, les vîtesses obtenues avec la charge de deux onces, sont dans le rapport de 1 à 1,436 ; le rapport des deux suivantes est de 1 à 1,1375 ; & des deux dernieres comme 1 à 1,2022. Le poids moyen des boulets de plomb tirés à deux & quatre onces, est 1,773, & celui des boulets de fer tirés aux mêmes charges, est 1,174 : à la charge de huit onces, le poids moyen des boulets de plomb est 1,792, & des boulets de fer,

fer, 1,162 : donc la raison inverse sous-doublée de ces poids moyens est comme 1 à 1,224 pour les boulets tirés à deux & quatre onces, & comme 1 à 1,241 pour ceux tirés à huit onces ; ce qui differe très-peu des rapports trouvés ci-dessus. Les vîtesses actuelles de ces dernieres expériences s'écartent de la loi de la pesanteur des boulets, dans le même sens que celles de la seconde suite d'épreuves.

Récapitulons les résultats de toutes ces expériences, & concluons-en les principes suivans.

1°. Il est évident que l'inflammation de la poudre est presqu'instantanée, puisqu'une charge s'enflamme presqu'entiérement dans un temps très-court.

2°. Les vîtesses communiquées à des boulets de même pesanteur, avec différentes charges de poudre, sont en raison sous-doublée de ces charges à peu près ; une petite différence en moins a lieu, lorsque les charges sont plus fortes (*).

3°. Lorsque des boulets de différens poids sont chassés avec des charges égales, les vîtesses communiquées sont à peu près en raison inverse sous-doublée des poids des boulets.

4°. Donc, en général, des boulets de différens poids, chassés avec différentes charges de poudre, reçoivent des vîtesses qui sont en rai-

(*) La différence devient si considérable pour les fortes charges dans les gros calibres, que l'on risqueroit de se tromper beaucoup, si l'on vouloit employer cette regle pour déduire la vîtesse communiquée par une forte charge, de celle qui résulte d'une petite ; & réciproquement.

ſon composée de la directe ſous-doublée des charges, & de l'inverſe ſous-doublée des poids des boulets, à peu près.

5°. Il y auroit donc de l'avantage à faire uſage de boulets d'une forme alongée, ou d'une matiere plus peſante : car, à charges égales, la force des boulets augmente, comme la racine quarrée de leur peſanteur.

6°. Ce ſeroit auſſi un avantage de diminuer le vent du boulet : il en pourroit réſulter une économie d'un tiers au moins dans la conſommation de la poudre.

7°. En réuniſſant les avantages mentionnés aux deux derniers articles, il eſt évident qu'on pourroit épargner environ la moitié de la poudre, ce qui fait un objet très-conſidérable. Mais quelqu'importante que ſoit cette économie, il paroît qu'elle pourroit encore être ſurpaſſée par celle qui tomberoit ſur la fonte & la fabrication des pieces de canon : car avec des boulets plus peſans, ſoit qu'on les alonge, ſoit qu'on les faſſe d'une matiere plus denſe, on pourroit employer des pieces plus courtes & plus légeres que celles qui ſont actuellement en uſage, & qui produiroient le même effet; de façon que dans le ſervice de la Marine, les petits bâtimens pourroient tirer des boulets auſſi peſans qu'on en tire dans les plus gros vaiſſeaux.

Enfin, l'utilité de nos expériences n'eſt point bornée à indiquer le rapport des boulets & des charges employés avec la même piece d'artillerie ; on en peut faire de pareilles avec des pieces de différentes longueurs, afin de découvrir la loi que ſuivent les effets des charges,

relativement aux longueurs des canons. En un mot, les principes sur lesquels ces expériences sont fondées, sont si fertiles en conséquences, qu'en y ajoutant les effets de la résistance du milieu, ils mettent en état d'éclaircir tout ce qui concerne la théorie & la pratique de l'Artillerie.



EXTRAIT
D'UNE DISSERTATION
DE M. EULER,

SUR l'explication des phénomenes de l'air, insérés dans le tome II. des Mémoires de l'Académie de Pétersbourg, pour l'année 1727.

PUISQUE l'organisation intérieure des corps ne peut être apperçue par les sens, c'est à l'imagination à en saisir & développer le méchanisme; de maniere toutefois qu'il en résulte un systême conforme aux loix connues de la nature, & propre à rendre raison de tous les phénomenes que présentent les diverses propriétés des corps. L'air, par exemple, quoiqu'il échappe à la vue, se manifeste néanmoins par une multitude de phénomenes, qui ne laissent aucune incertitude sur ses propriétés. La principale est celle par laquelle ce fluide tend continuellement à se raréfier, & se raréfie effectivement, lorsqu'aucun obstacle ne s'oppose à son expansion. C'est cette propriété de l'air, qu'on nomme élasticité, que M. Euler considere particuliérement, pour en déduire, & attribuer à ses particules une configuration propre à en expliquer tous les phénomenes.

Il suppose donc que l'air est un amas d'une

infinité de petites bulles, enveloppées chacune d'une pellicule aqueuse. Ces bulles renferment une matiere subtile qui s'y meut circulairement, & tend continuellement à les étendre par sa force centrifuge. Ce mouvement est entretenu & accéléré par une autre matiere plus subtile encore, qui pénetre & traverse librement tous les pores.

La structure de l'air étant ainsi conçue, on voit, 1°. que ce fluide s'étendroit à l'infini, si la gravité ne s'y opposoit pas : en effet, l'air supérieur pese sur l'inférieur, & l'expansion de celui-ci est arrêtée, dès qu'il en résulte une force élastique égale à la force comprimante de l'air supérieur. 2°. L'air n'est susceptible que d'une condensation limitée : car puisque chaque bulle renferme une quantité déterminée de matiere subtile, & que cette matiere, à cause de la force centrifuge, est toujours adhérente à la surface intérieure de la bulle, il faut nécessairement qu'autour du centre il y ait un espace vuide qui augmente à mesure que l'air se raréfie, & qui, dans l'état de condensation, diminue jusqu'à ce qu'enfin il disparoisse entiérement; il est clair qu'au de-là de ce degré de densité, il ne sera plus possible de comprimer l'air davantage.

A l'égard de la vîtesse avec laquelle la matiere subtile circule dans chaque bulle d'air, l'Auteur la suppose égale dans chaque particule de cette matiere, sans en attribuer une plus grande à celles qui sont plus éloignées du centre, qu'à celles qui en sont plus voisines ; parce qu'autrement il y auroit une plus grande force

centrifuge dans les plus grandes bulles, ce qui eſt contraire à l'expérience. Cela poſé, le calcul va nous conduire à la découverte du rapport des différens degrés d'élaſticité de l'air, relativement à ſes différentes denſités.

Soit donc CAB, fig. 27, une bulle d'air dans l'état de la plus forte compreſſion, & par conſéquent entiérement remplie par la matiere ſubtile; ADEB eſt la pellicule aqueuſe, & le reſte CDE eſt occupé par la matiere ſubtile. Soit $AC = g$; $CD = h$; $1 : \pi$ le rapport du rayon à la circonférence; n la peſanteur ſpécifique de la matiere ſubtile, & m la peſanteur ſpécifique de l'eau qui forme l'enveloppe; le volume du globule CAB ſera $= \frac{2}{3} \pi g^3$; celui du globule $CDE = \frac{2}{3} \pi h^3$, & la ſolidité de l'enveloppe $ADEB = \frac{2}{3} \pi (g^3 - h^3)$. Donc la maſſe de la matiere ſubtile renfermée dans l'eſpace CDE ſera $= \frac{2}{3} \pi n h^3$, & la maſſe de la pellicule aqueuſe $= \frac{2}{3} \pi m (g^3 - h^3)$. Ces maſſes ſont toujours les mêmes, quelle que ſoit l'expanſion des bulles d'air.

Soit k la hauteur d'où ſeroit acquiſe la vîteſſe de la matiere ſubtile; pour trouver la force centrifuge ou la force qui preſſe la ſurface du globule CDE, on prendra du centre l'indéterminée $CP = x$, & ſa différentielle $Pp = dx$. L'enveloppe ſphérique de l'épaiſſeur Pp & du rayon CP ſera égale $= 2\pi x^2 dx$, & ſa maſſe ſera $= 2\pi n x^2 dx$. La matiere ſubtile circulant avec une vîteſſe due à la hauteur k, on dira, ſelon Huyghens : le rayon x eſt au double $2k$ de la hauteur k, comme le poids $2\pi n x^2 dx$, eſt au poids qui exprime la force centrifuge, & qu'on

trouve $= 4\pi nkx\,dx$, dont l'intégrale $2\pi nkx^2$ donne la force centrifuge de la ſphere CP, & par conſéquent $2\pi nkh^2$, celle de la bulle CDE.

Conſidérons maintenant une bulle d'air raréfiée CAB, figure 28, ADEB eſt la pellicule aqueuſe dont elle eſt enveloppée; DFGE eſt la matiere ſubtile circulant autour du centre; & CFG eſt un eſpace vuide, ou ne renfermant qu'une matiere ſans peſanteur. Soit AC $= a$; CD $= b$; CF $= c$; on trouvera, comme ci-deſſus, la ſolidité de l'enveloppe aqueuſe ADEB $= \frac{2}{3}\pi(a^3 - b^3)$, le volume de l'eſpace moyen DFGE, occupé par la matiere ſubtile $= \frac{2}{3}\pi(b^3 - c^3)$, & le volume de la bulle entiere CAB $= \frac{2}{3}\pi a^3$. Soit i la peſanteur ſpécifique de l'air, ou d'une bulle entiere, le poids de cette bulle ſera $= \frac{2}{3}\pi i a^3$, & comme il eſt égal à la ſomme des poids des différentes parties de la bulle, c'eſt-à-dire à $\frac{2}{3}\pi m(a^3 - b^3) + \frac{2}{3}\pi n(b^3 - c^3)$, on a donc $ia^3 = ma^3 - mb^3 + nb^3 - nc^3$.

Les quantités d'eau & de matiere ſubtile qui compoſent chaque bulle d'air, étant toujours les mêmes, on aura ces équations : $\frac{2}{3}\pi(g^3 - h^3) = \frac{2}{3}\pi(a^3 - b^3)$, & $\frac{2}{3}\pi h^3 = \frac{2}{3}\pi(b^3 - c^3)$; donc $b = \sqrt[3]{(a^3 - g^3 + h^3)}$, & $c = \sqrt[3]{(b^3 - h^3)} = \sqrt[3]{(a^3 - g^3)}$; ſubſtituant ces valeurs dans l'équation précédente, on aura $ia^3 = mg^3 - mh^3 + nh^3$; donc $h^3 = \frac{ia^3 - mg^3}{n - m}$, $b = \frac{\sqrt[3]{(i + n - m)a^3 - ng^3}}{n - m}$, & $c = \sqrt[3]{(a^3 - g^3)}$. Ce qui exclut du calcul les quantités b, c, h, qui indiquent les diſtances

des parties intérieures de la bulle, au centre.

La force centrifuge de la matiere ſubtile qui circule avec la viteſſe due à la hauteur k, dans une ſphere du rayon x, ayant été trouvée $= 2\pi nkxx$, ſi la matiere ſubtile occupoit tout l'eſpace CDE, ſa force centrifuge ſeroit $= 2\pi nkbb$, ôtant donc la force centrifuge de celle qui rempliroit l'eſpace CFG, qui eſt $= 2\pi nkcc$; on aura $2\pi nk\ (bb - cc)$ pour l'expreſſion de la force centrifuge de la matiere ſubtile qui circule dans l'eſpace DFGE; ſubſtituant les valeurs de b & c, cette expreſſion deviendra $2\pi nk$ $\left[\left(\frac{(i - m + n)\, a^3 - ng^3}{n - m}\right)^{\frac{2}{3}} - (a^3 - g^3)^{\frac{2}{3}}\right]$. Soit $h^3 = pg^3$, à cauſe de $ia^3 = mg^3 - mh^3 + nh^3$, on aura $ia^3 = (m - mp + np)\, g^3$; donc $g^3 - \frac{ia^3}{m - mp + np}$; donc la force centrifuge équivaut à un poids $= 2\pi nkaa$ $\left[\left(\frac{m - i + pi - mp + np}{m - mp + np}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{m - mp + np - i}{m - mp + np}\right)^{\frac{2}{3}}\right] = \frac{2\pi nkaa}{\sqrt[3]{(m - mp + np)^2}} \left(\sqrt[3]{(mi + pi - pm + pn)^2} - \sqrt[3]{(m - pm + pn - i)^2}\right)$.

Comme c'eſt en vertu de la force centrifuge que les bulles font effort pour s'étendre, cette force eſt égale à la force élaſtique de l'air, on pourra donc trouver par la derniere équation la grandeur de l'élaſticité de l'air. Mais comme il s'agit ici principalement de la force élaſtique relativement à ſes divers degrés de denſité, d'humidité & de viteſſe, on pourra négliger le facteur conſtant $2\pi n$, & regarder l'élaſticité de

l'air comme proportionnelle à $\frac{kaa}{\sqrt[3]{(m-mp+np)^2}}$ $\left(\sqrt[3]{(m-i+pi-pm+pn)^2}-\sqrt[3]{(m-pm+pn-i)^2}\right)$; mais l'équation $ia^3 = (m-pm+pn)g^3$, donne $aa = gg\sqrt[3]{\left(\frac{m-pm+pn}{i}\right)^2}$; donc, si à la place de a on emploie la quantité g, qu'on pourra ensuite rejeter comme constante, la force élastique de l'air sera comme $k\left(\sqrt[3]{\left(\frac{m-i+pi-pm+pn}{i}\right)^2} - \sqrt[3]{\left(\frac{m-i-pm+pn}{i}\right)^2}\right)$. C'est-à-dire que, toutes choses égales d'ailleurs, la force élastique de l'air est proportionnelle à la hauteur dont un corps devroit tomber pour acquérir la vitesse avec laquelle la matiere subtile circule dans les bulles d'air.

Il ne reste plus qu'à avoir une mesure de cette force élastique, c'est-à-dire à connoître sa pression sur une base ou surface donnée; car jusqu'à présent il n'a été question que de cette force agissante dans une bulle quelconque, ou contre une base d'autant plus grande que cette bulle est plus étendue : mais ces bases sont comme les quarrés des rayons des bulles, & les forces élastiques leur sont aussi proportionnelles; soit donc un globule constant dont le rayon $= e$; on fera a^2 est à e^2, comme la force élastique qu'on vient de trouver, est à la pression de cette force sur la base donnée, il faut donc multiplier la formule précédente par $\frac{e^2}{a^2}$, mettre pour a^2 sa valeur $gg\sqrt[3]{\left(\frac{m-pm+pn}{i}\right)^2}$,

rejeter ensuite e^2 & g^2 comme constantes, & la force élastique de l'air sera exprimée par $k \left(\sqrt[3]{\left(\frac{m-i+pi-pm+pn}{m-pm+pn}\right)^2} - \sqrt[3]{\left(\frac{m-i-pm+pn}{m-pm+pn}\right)^2} \right)$.

Faisons maintenant disparoître la partie aqueuse de la bulle, on aura $g = h$, & par conséquent $p = 1$; donc, dans ce cas, la force élastique de l'air sera $k \left(\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2} \right)$, ou, en multipliant par la quantité constante $\sqrt[3]{n^2}$; $k \left(\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2} \right)$. Enfin, si k où la vîtesse est constante, afin de connoître la loi suivant laquelle l'élasticité de l'air varie relativement à ses divers degrés de densité, la force élastique sera alors comme $\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}$.

Si l'on exprime donc par q la densité de l'air réduit à l'état de la plus forte compression, par 1 la densité de l'air dans son état naturel, & par m un autre degré de densité; la force élastique de l'air dans son état naturel, est à la force élastique résultante de la densité m, comme $\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-1)^2}$ est à $\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-m)^2}$. C'est-là la formule dont M. Euler fait usage dans sa seconde remarque sur la proposition XI du premier chapitre.



TABLE
DES MATIERES.

A

B

C

E

F

G

H

I

L

M

R

V

Fin de la Table des Matieres.

FAUTE A CORRIGER.

Page 187, ligne 19, au lieu de son inertie, *lisez* leur inertie.

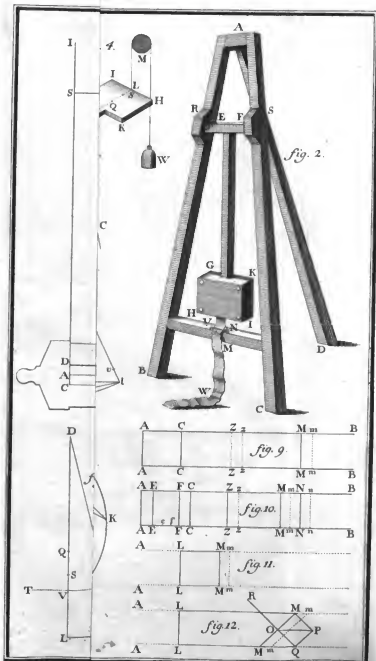
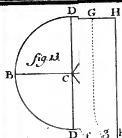
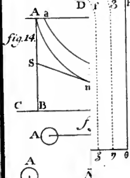


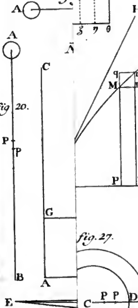
fig. 2.
fig. 9
fig. 10.
fig. 11.
fig. 12.

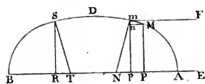


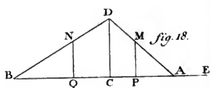

fig.13.
D
G
H
B
C
D

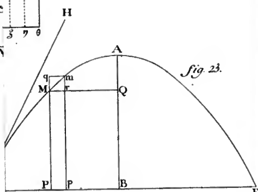

fig.14.
A
a
S
n
C
B

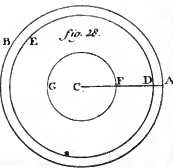

A


A
fig 20.
P
p
B
C
G
A
E


fig.17.
S
D
m
n
M
F
B
R
T
N
p
P
A
E


D
N
M
fig.18.
B
Q
C
P
A
E


H
A
fig.23.
q
m
M
r
Q
P
p
B
F


fig.27.
C
P
P
D
A
fig.28.
B
E
G
C
F
D
A

Wes fc.



Google

Digitized by Google



